

Operazioni con i polinomi

Le operazioni con i polinomi (addizione algebrica, moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza) si riducono, ovviamente, a operazioni fra i loro termini, cioè alla somma e alla differenza fra monomi che abbiamo già esaminato. Osserviamo il procedimento con degli esempi.

L'addizione algebrica

Come per i monomi, per addizione algebrica intendiamo l'addizione e la sottrazione di due o più polinomi.

- Per calcolare la somma $(3x^2 - 2xy + 4) + (8x^2 + 5xy + 3)$:
 - eliminiamo le parentesi: $3x^2 - 2xy + 4 + 8x^2 + 5xy + 3$
 - operiamo la riduzione dei termini simili:

$$3x^2 - 2xy + 4 + 8x^2 + 5xy + 3 = (3 + 8)x^2 + (-2 + 5)xy + 4 + 3 = 11x^2 + 3xy + 7$$
- Per calcolare la differenza $(7x^2 - 9xy + 2y) - (-x^2 + 2xy - 8y)$:
 - eliminiamo le parentesi: $7x^2 - 9xy + 2y + x^2 - 2xy + 8y$
 - operiamo la riduzione dei termini simili:

$$7x^2 - 9xy + 2y + x^2 - 2xy + 8y = (7 + 1)x^2 + (-9 - 2)xy + (2 + 8)y = 8x^2 - 11xy + 10y$$

Per eseguire un'addizione algebrica fra due o più polinomi si scrivono uno di seguito all'altro i termini dei vari polinomi, con lo stesso segno se si esegue la somma e con il segno opposto se si esegue una sottrazione, e quindi si opera la riduzione dei termini simili.

ESEMPIO

- Eseguiamo la seguente addizione algebrica.

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{3}a^2b + ab^2 - \frac{3}{4}ab\right) + \left(3a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + ab - 5b^2\right) - \left(2a^2b + \frac{2}{3}ab\right) = \\
 & = -\frac{1}{3}a^2b + ab^2 - \frac{3}{4}ab + 3a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + ab - 5b^2 - 2a^2b - \frac{2}{3}ab = \\
 & = \left(-\frac{1}{3} + 3 - 2\right)a^2b + \left(1 - \frac{1}{3}\right)ab^2 + \left(-\frac{3}{4} + 1 - \frac{2}{3}\right)ab - 5b^2 = \\
 & = \left(\frac{-1 + 9 - 6}{3}\right)a^2b + \frac{2}{3}ab^2 + \left(\frac{-9 + 12 - 8}{12}\right)ab - 5b^2 = \\
 & = \frac{2}{3}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{5}{12}ab - 5b^2
 \end{aligned}$$

La moltiplicazione

Esaminiamo
un polinomio

Moltiplicazione

► Moltiplicazione
(2ab)
applicando la
= (2a) · b

► Moltiplicazione
(5a²)
applicando la
= (5 · a²)

Moltiplicazione

Moltiplicazione

(ab + $\frac{1}{6}$)

applicando la

(ab + $\frac{1}{6}$)

applicando la

= (ab + $\frac{1}{6}$)

= $\frac{3}{2}a$

riduzione

= $\frac{3}{2}a$

= $\frac{3}{2}a$

Risultato

► La moltiplicazione

Esaminiamo la moltiplicazione distinguendo due casi, moltiplicazione di un monomio per un polinomio e moltiplicazione di due polinomi.

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

- Moltiplichiamo il monomio $2ab$ per il polinomio $ab - 5a^2 + b^2$:

$$(2ab) \cdot (ab - 5a^2 + b^2)$$

applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione possiamo scrivere:

$$= (2ab) \cdot (ab) + (2ab) \cdot (-5a^2) + (2ab) \cdot (+b^2) = 2a^2b^2 - 10a^3b + 2ab^3$$

- Moltiplichiamo il polinomio $5a^2b - 2a + b^2$ per il monomio $4ab$:

$$(5a^2b - 2a + b^2) \cdot (4ab)$$

applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione possiamo scrivere:

$$= (5a^2b) \cdot (4ab) + (-2a) \cdot (4ab) + (+b^2) \cdot (4ab) = 20a^3b^2 - 8a^2b + 4ab^3$$

Moltiplicazione di due polinomi

Moltiplichiamo i due polinomi $ab + \frac{1}{6}b^2$ e $\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}b^2$:

$$\left(ab + \frac{1}{6}b^2\right) \cdot \left(\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}b^2\right) =$$

applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione, avremo:

$$\left(ab + \frac{1}{6}b^2\right) \cdot \left(\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}b^2\right) = (ab) \cdot \left(\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}b^2\right) + \left(\frac{1}{6}b^2\right) \cdot \left(\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}b^2\right) =$$

applicando ancora la proprietà distributiva:

$$= (ab) \cdot \left(\frac{3}{2}ab\right) + (ab) \cdot \left(-\frac{2}{3}b^2\right) + \left(\frac{1}{6}b^2\right) \cdot \left(\frac{3}{2}ab\right) + \left(\frac{1}{6}b^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}b^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{2}{3}ab^3 + \frac{1}{4}ab^3 - \frac{1}{9}b^4 =$$

riduciamo i termini simili:

$$= \frac{3}{2}a^2b^2 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)ab^3 - \frac{1}{9}b^4 = \frac{3}{2}a^2b^2 + \left(-\frac{8+3}{12}\right)ab^3 - \frac{1}{9}b^4 =$$

$$= \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{5}{12}ab^3 - \frac{1}{9}b^4$$

Riassumendo:

- Per moltiplicare un monomio per un polinomio, o viceversa, si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio e si sommano poi i prodotti così ottenuti riducendo i termini simili.
- Per moltiplicare due polinomi si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio, si sommano poi i prodotti così ottenuti riducendo i termini simili.



$$589 \left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5} \right)$$

$$590 \left(\frac{3}{7}a^2 + \frac{5}{6}b^2 \right) - \left(\frac{2}{7}a^2 + \frac{1}{5}ab - \frac{5}{3}b^2 \right) - (ab - a^2) + \frac{5}{14}a^2$$

$$591 \left(\frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{5}{2}x^2y \right) - \left(\frac{5}{12}x + \frac{3}{5}x^2y^2 \right) + \left(-\frac{3}{4}x^2y - \frac{13}{20}x^2y^2 \right) + \frac{1}{6}x$$

$$592 \left(-\frac{5}{4}ab - a^2 \right) - \left(\frac{3}{2}ab - \frac{5}{4}a^2 - a^2 \right) - \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{5}{2}ab \right)$$

$$593 \left(\frac{4}{3}a^2 - \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}a \right) - \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a^2 \right) + \left(-\frac{1}{6}a^2 - \frac{2}{6}a \right) - \left(-\frac{5}{12}a \right)$$

$$594 \left(\frac{5}{2}c - \frac{2}{7}c^2 + \frac{3}{8}c^3 \right) - \left(3c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c^3 \right) + \left(-\frac{3}{14}c^2 + \frac{1}{4}c \right)$$

$$595 \left(\frac{3}{4}x^2y^2 - 2x^2 + \frac{3}{4}y \right) - \left(2x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{4}y \right)$$

$$596 \left(\frac{7}{15}ab + \frac{1}{8}a^2 + b^2 \right) - \left(-\frac{3}{5}ab - \frac{1}{12}a^2 + b^2 \right) - \frac{16}{15}ab$$

$$597 \left(-\frac{1}{5}ab + \frac{4}{3}a^2 \right) - \left(\frac{5}{9}a^2 + \frac{1}{6}ab + \frac{1}{2}c \right) + \left(\frac{1}{10}c + \frac{1}{10}ab \right)$$

$$598 -\frac{2}{5}a^2b^2 - \left[-\frac{1}{3}a^2b^2 + \frac{3}{4}a^2b^2 - \left(a^2b^2 + \frac{1}{3}a^2b^2 \right) \right]$$

$$599 -\frac{7}{5}x - \left[\left(\frac{1}{2}xy - \frac{1}{3}x \right) - \left(-\frac{3}{5}y + x \right) + \frac{2}{5}y \right] + xy$$

$$600 - \left\{ - \left[\frac{2}{3}a^2 - \left(\frac{5}{4}b^2 + \frac{1}{2}a \right) \right] + \left[- \left(\frac{5}{6}a + \frac{3}{2}b^2 \right) + \frac{2}{3}a^2 \right] \right\}$$

$$601 \left[\frac{3}{5}x + y - (y^2 - x^2) \right] - \left[\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}x + (x^2 - y^2) \right]$$

$$602 \left(-\frac{5}{3}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{5}{4}a^2 \right) - \left[-\frac{7}{2}a^2 - \left(\frac{3}{5}a + a^2 \right) \right]$$

$$603 \left[\frac{1}{5}x - \left(xy - \frac{1}{4}y \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{4}y + xy \right) - \frac{2}{3}x \right]$$

$$604 - \left[\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b \right) - \left(\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}a \right) \right] + \left[- \left(\frac{1}{3}a + b \right) - \frac{1}{12}a \right]$$

$$605 -\frac{3}{4}a - \left[\frac{9}{5}ab - \frac{1}{5}a + \left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{2}a - 1 \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}b \right] + \frac{5}{9}b$$

$$606 \left[-\frac{4}{25}b - \left(b - \frac{3}{2}a \right) \right] - \left[- \left(\frac{1}{5}b + \frac{1}{2}a \right) + \left(a - \frac{3}{5}b \right) \right]$$

$$607 3 + x + \left[\frac{5}{2}x - (3 + 6y) \right] - \left[8y - \left(3 - \frac{1}{5}y \right) \right] + \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y$$

$$608 \left(-\frac{5}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \right) - \left[\left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{5}{4}a \right) - \left(\frac{1}{8}a - \frac{5}{6}a^2 \right) - \frac{8}{3}a^2 \right]$$

$$625 \quad (10b^2 + 4ab - 6a^2)(-7xy^2 - 3x^2y + 5y^3)(-6x^2)$$

$$626 \quad (3ab^2 + 2a - ab^3)(8ab)(-5x^2 - 3x^2y^3 + 2xy^3)(-7xy)$$

$$628 \quad (-3a^3b)(-2a^2b^2 + 6ab^2 - 6ab^3)(5x^2y)(4xy^2 - 2xy^3 + 7y^3)$$

$$629 \quad (-3ab)\left(-a^2 + \frac{2}{3}b\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}ab\right)(2a - b)$$

$$\left(-\frac{1}{2}ab\right)\left(-\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b + c\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\left(-\frac{3}{4}a + \frac{2}{5}ab - \frac{2}{3}b\right)$$

$$\left(-\frac{3}{5}x^2\right)\left(-\frac{10}{6}y + \frac{5}{9}xy - \frac{1}{3}x\right)$$

$$630 \quad \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(-a - 2b - \frac{3}{4}c\right)$$

$$631 \quad \left(-\frac{3}{4}x^2y\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y - 2\right)$$

$$632 \quad \left(\frac{4}{5}xy\right)\left(y - \frac{5}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$633 \quad \left(-\frac{1}{4}a + \frac{2}{7}b - \frac{3}{5}ab\right)\left(-\frac{35}{6}a^2b\right)$$

$$634 \quad \left(-\frac{4}{3}a^2b\right)\left(\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b + \frac{21}{16}ab\right)$$

$$635 \quad \left(\frac{5}{8}a^2b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{2}a\right)\left(-\frac{4}{3}ab\right)$$

$$636 \quad \left(\frac{5}{8}b - \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}ab^2\right)$$

$$637 \quad \left(\frac{7}{5}xy - \frac{7}{3}x^2 + \frac{3}{10}y^2\right)\left(-\frac{15}{2}y\right)$$

$$638 \quad \left(\frac{1}{18}ab - \frac{6}{27}a^2 + \frac{5}{9}a^3\right)\left(\frac{27}{2}b^2\right)$$

$$639 \quad \left(\frac{5}{4}x^2y - \frac{3}{2}xy - \frac{15}{2}y^3\right)\left(-\frac{8}{15}xy\right)$$

$$640 \quad \left(-\frac{5}{12}ab\right)\left(\frac{12}{5}ab - \frac{7}{2}a^2 - \frac{4}{5}a\right)$$

$$641 \quad \left(\frac{20}{21}a^2b\right)\left(\frac{7}{4}a - \frac{15}{4}ab - \frac{3}{10}a^2b^3\right)$$

$$642 \quad \left(-\frac{10}{3}xy^2\right)\left(-\frac{3}{4}xy + \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}x^2\right)$$

$$643 \quad \left(-\frac{21}{5}xy^2\right)\left(\frac{5}{7}xy - \frac{10}{3}x^2 - \frac{1}{42}x^2y\right)$$

$$644 \quad \left(\frac{14}{9}abc\right)\left(-\frac{3}{2}ab + \frac{3}{7}bc - \frac{1}{28}ac\right)$$