Applicazioni del teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora va applicato *solo ed esclusivamente ai triangoli rettangoli*. In una figura piana qualsiasi spesso però si può ricavare un triangolo rettangolo tracciando opportunamente altezze, bisettrici, diagonali, apotemi, raggi ecc. È ovvio che tutte le volte in cui ciò è possibile, al triangolo rettangolo ricavato sarà applicabile il teorema di Pitagora.

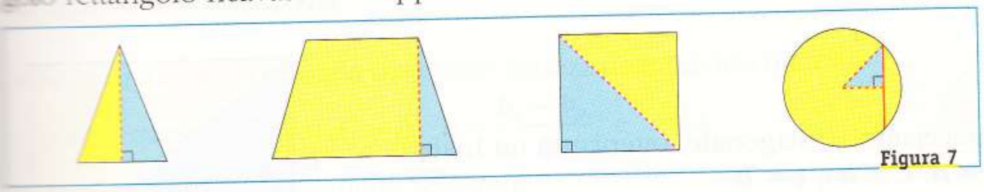


Figura 7

Triangolo isoscele

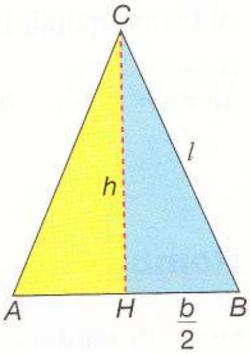


Figura 8

Se in un triangolo isoscele tracciamo l'altezza relativa alla base, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{i = l}$, $\boldsymbol{C = h}$ e $\boldsymbol{c = \frac{b}{2}}$.

Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}; \quad h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}; \quad \frac{b}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Triangolo equilatero

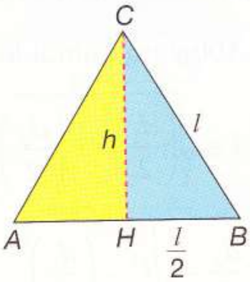


Figura 9

Se in un triangolo equilatero tracciamo l'altezza, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{i = l}$, $\boldsymbol{C = h}$ e $\boldsymbol{c = \frac{l}{2}}$. Abbiamo la seguente relazione:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Per $\frac{\sqrt{3}}{2}$ si assuma il valore approssimato di 0,866, per cui avremo:

$$h = l \times 0{,}866 \quad \text{e} \quad l = \frac{h}{0{,}866}.$$

Triangolo rettangolo isoscele

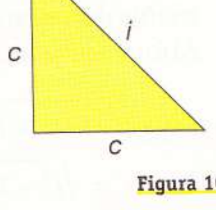


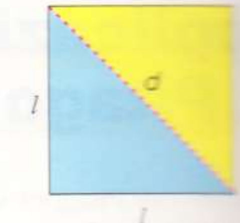
Figura 10

In un triangolo rettangolo isoscele il teorema di Pitagora è applicabile direttamente; ricorda però che i due cateti sono congruenti, per cui avremo:

$$i = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}.$$

Osservando che il valore che generalmente si assume per $\sqrt{2}$ è 1,414, avremo anche: $i = c \times 1{,}414$ e $c = \frac{i}{1{,}414}$.

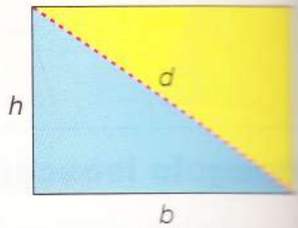
Quadrato



Se in un quadrato tracciamo la diagonale, otteniamo un triangolo rettangolo isoscele dove $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{l}$.
Per quanto detto prima avremo:

$$d = l \times 1,414; \qquad l = \frac{d}{1,414}.$$

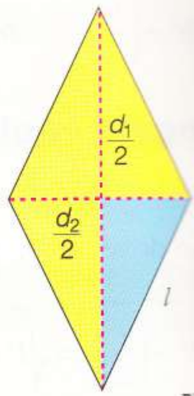
Rettangolo



Se in un rettangolo tracciamo la diagonale, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}$.
Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$d = \sqrt{h^2 + b^2}; \quad h = \sqrt{d^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{d^2 - h^2}.$$

Rombo



Figura

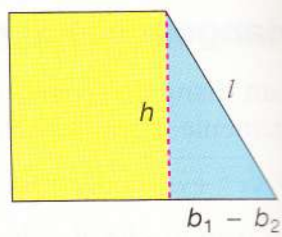
Se in un rombo equilatero tracciamo le due diagonali, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{d_1}}{\boldsymbol{2}}$ e $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{d_2}}{\boldsymbol{2}}$.

Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$l = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}; \quad \frac{d_1}{2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2};$$

$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}.$$

Trapezio rettangolo



Figura

- Se in un trapezio rettangolo tracciamo l'altezza, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{b_2}$ e $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{l}$.
  Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$l = \sqrt{h^2 + (b_1 - b_2)^2}; \quad h = \sqrt{l^2 - (b_1 - b_2)^2};$$

$$b_1 - b_2 = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

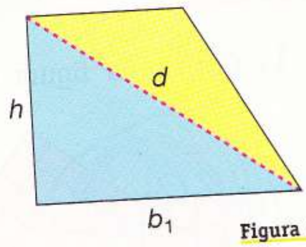


Figura 15

Se in un trapezio rettangolo tracciamo la diagonale maggiore, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{c = h}$, $\boldsymbol{C = b_1}$ e $\boldsymbol{i = d}$.
Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$d = \sqrt{h^2 + b_1^2}; \quad h = \sqrt{d^2 - b_1^2}; \quad b_1 = \sqrt{d^2 - h^2}.$$

Trapezio isoscele

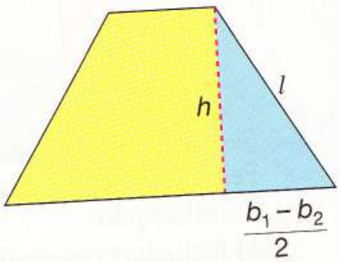


Figura 16

- Se in un trapezio isoscele tracciamo l'altezza, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{C = h}$, $\boldsymbol{c = \frac{b_1 - b_2}{2}}$ e $\boldsymbol{i = l}$.
Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2}; \quad h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2};$$

$$\frac{b_1 - b_2}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

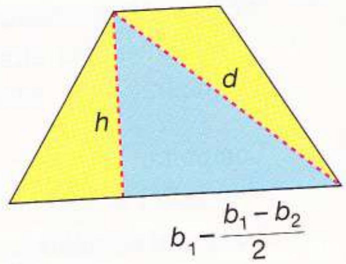


Figura 17

- Se in un trapezio isoscele tracciamo l'altezza e una diagonale, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{c = h}$, $\boldsymbol{C = b_1 - \frac{b_1 - b_2}{2}}$ e $\boldsymbol{i = d}$.
Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$h = \sqrt{d^2 - \left(b_1 - \frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2}; \quad d = \sqrt{h^2 + \left(b_1 - \frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2};$$

$$b_1 - \frac{b_1 - b_2}{2} = \sqrt{d^2 - h^2}.$$

Poligono regolare

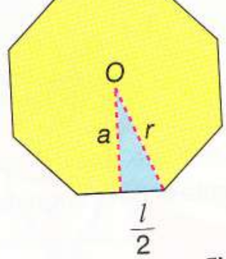


Figura 18

Se in un poligono regolare tracciamo il raggio e l'apotema, otteniamo un triangolo rettangolo dove $\boldsymbol{i = r}$, $\boldsymbol{C = a}$ e $\boldsymbol{c = \frac{l}{2}}$.
Abbiamo quindi le seguenti relazioni:

$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}; \quad a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}; \quad \frac{l}{2} = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Risolvi i seguenti problemi riguardanti l'applicazione del teorema di Pitagora al rettangolo e al quadrato.

149. Calcola la misura della diagonale di un rettangolo avente le dimensioni lunghe rispettivamente 132 cm e 85 cm. **[157 cm]**

150. Calcola la misura della diagonale di un rettangolo avente la base lunga 30 cm e l'altezza congruente ai 12/5 della base. **[78 cm]**

151. Calcola la misura della diagonale di un rettangolo le cui dimensioni hanno la somma e la differenza che misurano rispettivamente 51 cm e 21 cm. **[39 cm]**

152. Calcola la misura della diagonale di un rettangolo sapendo che la differenza delle sue dimensioni misura 14 cm e sono una i 4/3 dell'altra. **[70 cm]**

153. Calcola la misura della diagonale e l'area di un rettangolo avente il perimetro di 196 cm e le dimensioni una i 40/9 dell'altra. **[82 cm; 1 440 cm^2]**

154. Calcola la misura della diagonale, il perimetro e l'area di un rettangolo avente la base, lunga 16,8 cm, che supera l'altezza di 9,8 cm. **[18,2 cm; 47,6 cm; 117,6 cm^2]**

155. Calcola la misura della diagonale e l'area di un rettangolo avente il perimetro di 186 cm e la base i 7/24 dell'altezza. **[75 cm; 1 512 cm^2]**

156. Calcola la misura della diagonale e l'area di un rettangolo in cui le dimensioni sono una i 3/4 dell'altra e la loro differenza è di 18 cm. **[90 cm; 3 888 cm^2]**

157. In un rettangolo la base e la diagonale misurano rispettivamente 17 cm e 145 cm. Calcola perimetro e area del rettangolo. **[322 cm; 2 448 cm^2]**

158. In un rettangolo l'altezza e la diagonale sono una 12/13 dell'altra e la loro somma misura 150 cm. Calcola perimetro e area del rettangolo. **[204 cm; 2 160 cm^2]**

159. In un rettangolo la somma delle lunghezze della base e della diagonale misura 64 cm e la loro differenza 4 cm. Calcola perimetro e area del rettangolo. **[92 cm; 480 cm^2]**

160. Un rettangolo è equivalente ai 2/3 di un quadrato avente il lato di 30 cm. Sapendo che una dimensione del rettangolo misura 20 cm, calcolane il perimetro e la lunghezza della diagonale. **[100 cm; 36,05 cm]**

161. Un rettangolo è equivalente a un triangolo la cui base misura 117 cm e l'altezza 37 cm meno della base. Sapendo che una dimensione del rettangolo misura 65 cm, calcolane diagonale e perimetro. **[97 cm; 274 cm]**

162. In un rettangolo, avente l'area di 540 cm^2, la base è i 5/12 dell'altezza. Calcola la misura della diagonale e il perimetro del rettangolo. **[39 cm; 102 cm]**

163. Calcola la misura della diagonale e l'area di un quadrato avente il perimetro di 232 cm. **[82,024 cm; 3 364 cm^2]**

164. Calcola la misura della diagonale e l'area di un quadrato il cui perimetro è uguale a quello di un triangolo equilatero di lato 40 cm. **[42,426 cm; 900 cm^2]**

165. Calcola la misura della diagonale e l'area di un quadrato avente il perimetro uguale al doppio della misura della diagonale di un rettangolo che ha l'area di 43 200 cm^2 e l'altezza lunga 180 cm. **[212,13 cm; 22 500 cm^2]**

166. Un quadrato ha l'area di 3 136 cm^2. Calcola l'area e la misura della diagonale di un rettangolo isoperimetrico al quadrato, sapendo che le sue dimensioni sono una i 4/3 dell'altra. **[3 072 cm^2; 80 cm]**

167. Il perimetro di un rettangolo è 224 cm e le sue dimensioni sono una i 3/4 dell'altra. Calcola:

a) la misura della diagonale del rettangolo;

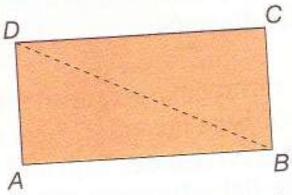
b) il perimetro di un quadrato equivalente a 1/12 del rettangolo.

[80 cm; 64 cm]

168. In un rettangolo *ABCD* la somma della diagonale e di una dimensione misura 250 cm e la differenza 90 cm.
Calcola:

a) area e perimetro del rettangolo;

b) area e perimetro di un rombo le cui diagonali sono congruenti alla metà delle dimensioni del rettangolo.



[12 000 cm^2; 460 cm; 1 500 cm^2; 170 cm]

169. L'area di un rettangolo è 1 728 cm^2 e le dimensioni sono una i 3/4 dell'altra.
Calcola:

a) il perimetro e la diagonale del rettangolo;

b) la misura della diagonale di un quadrato isoperimetrico al rettangolo.

[168 cm; 60 cm; 59,388 cm]

170. Un rettangolo è equivalente a un quadrato di lato 32 cm. Calcola il perimetro e la misura della diagonale del rettangolo sapendo che le sue dimensioni sono una 1/4 dell'altra.

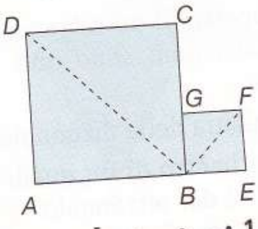
[160 cm; 65,97 cm]

171. I lati dei due quadrati *ABCD* e *BEFG* sono tali che la loro somma è 55 cm e $BC = \frac{8}{3}BE$.
Calcola:

a) il perimetro e l'area di ciascun quadrato;

b) la misura della diagonale di ciascun quadrato (approssima agli interi);

c) l'area di un rettangolo avente per dimensioni le diagonali *DB* e *BF*.



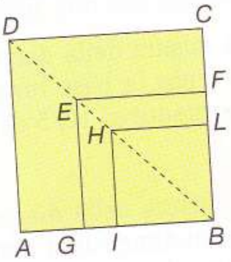
[...; ...; ...; 1 199,64 cm^2]

172. Calcola il perimetro e l'area del poligono *GEFLHI* sapendo che:

a) l'area del quadrato *ABCD* è 144 cm^2;

b) *H* è punto medio della diagonale *BD*;

c) $EH = \frac{1}{3}HB$.

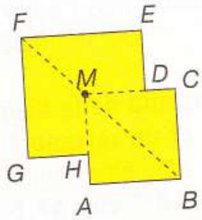


[...; 28 cm^2]

173. Il poligono *ABCDEFGH* è formato da due quadrati parzialmente sovrapposti (vedi figura). I lati dei due quadrati sono uno i 4/3 dell'altro e la loro somma misura 35 cm; inoltre $MH = 2AH$. Calcola:

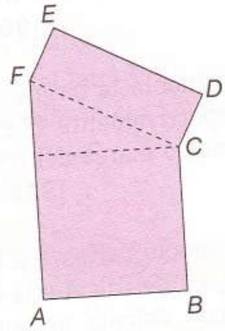
a) l'area ed il perimetro del poligono;

b) la misura della diagonale *BF*.



[525 cm^2; 100 cm; 35,35 cm]

174. Il poligono *ABCDEF* è formato da un rettangolo, un triangolo rettangolo e un quadrato. Sapendo che la base e l'altezza del rettangolo misurano rispettivamente 80 cm e 20 cm e il lato del quadrato misura 64 cm, calcola perimetro e area del poligono.



[360 cm; 7 232 cm^2]