Quantità in... rapporto

Andrea e Paolo stanno commentando il risultato delle partite a calcetto.
Come sai, possiamo esprimere il risultato, "Paolo ha vinto 6 partite su 10", dicendo:

- $\frac{6}{10}$ (6 su 10) partite vinte per Paolo;
- Paolo vince 6 : 10 (6 su 10).

Sono modi diversi per esprimere uno stesso concetto: "tra due quantità, 6 partite vinte e 10 partite giocate, il **rapporto** è di **sei a dieci**".

Facciamo qualche altro esempio.

- Un quartiere di 3600 persone ha un verde di 9000 m^2: "il **rapporto** verde/persone è di **9000 a 3600**", intendendo che per ogni persona ci sono a disposizione in media (9000 : 3600) = 2,5 m^2 di verde.
- Un negozio alimentare ha una clientela giornaliera di 800 persone e 4 casse: "il **rapporto** clienti/casse è di **800 a 4**", intendendo che ogni cassa serve in media (800 : 4) = 200 clienti.

Gli esempi ci evidenziano l'importanza di mettere in rapporto due quantità per poterle valutare meglio e ci permettono di dire che **il rapporto fra due dati** non **è** altro che **il loro quoziente**.

In generale diciamo che:

> Dati due numeri a e b (con $b \neq 0$) si chiama **rapporto** fra i due numeri il loro quoziente, ottenuto dividendo il primo per il secondo:
>
> $$a : b$$

Possiamo scrivere il rapporto fra due numeri in tre modi. Siano, ad esempio, 8 e 5 i due numeri; scriveremo il loro rapporto:

- sotto forma di **divisione** → **8** : **5** (leggi rapporto "8 a 5");
- sotto forma di **frazione** → $\frac{8}{5}$ (leggi rapporto "otto quinti");
- sotto forma di **numero decimale** → **1,6** (leggi rapporto "1,6"), dato dal quoziente della loro divisione 8 : 5 = 1,6.

Impariamo ora la nomenclatura relativa a un rapporto $a : b$ o $\frac{a}{b}$:

- i due numeri a e b si chiamano **termini del rapporto**;
- il primo numero, a, si chiama **antecedente**;
- il secondo numero, b, si chiama **conseguente**.

$$\mathbf{a : b}$$

antecedente — conseguente

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

antecedente — conseguente

Consideriamo il rapporto 4 : 5 il cui valore è 0,8 (è sufficiente eseguire la divisione) e osserviamo come, scambiando tra loro i termini, otteniamo un altro valore; il rapporto 5 : 4 è infatti 1,25.

In un rapporto, quindi, **non va** mai **scambiato l'ordine dei termini**.

Dati due numeri, per esempio 9 e 7, è quindi possibile considerare due rapporti:

- 9 : 7, che chiamiamo più esattamente **rapporto diretto**;
- 7 : 9, che chiamiamo **rapporto inverso**, ottenuto scambiando l'antecedente con il conseguente.

Rapporto diretto e rapporto inverso sono tali che il loro prodotto è uguale a 1:

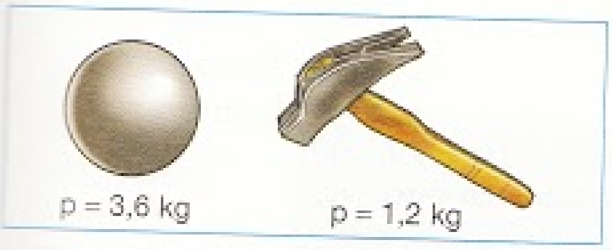
$$\frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{7}_{1}} \times \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{9}_{1}} = 1$$

Grandezze in... rapporto

Oltre che fra quantità numeriche spesso usiamo il concetto di rapporto fra grandezze; esaminiamo i due casi che si possono presentare: le due grandezze sono omogenee, le due grandezze non sono omogenee.

Rapporto fra grandezze omogenee

Consideriamo il peso di due oggetti, per esempio una sfera di metallo e un martello.



Il rapporto fra le due grandezze è:

$$3{,}6 : 1{,}2 = 3$$

Osserviamo che il rapporto fra le due grandezze non varia se esprimiamo i pesi in un'altra unità di misura:

- 3 600 g e 1 200 g → 3 600 : 1 200 = **3**
- 36 hg e 12 hg → 36 : 12 = **3**

e così via...

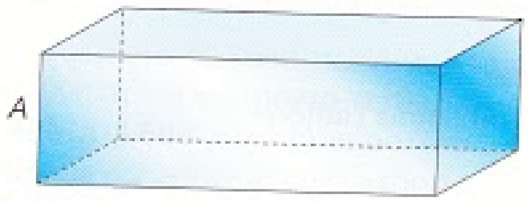
Il rapporto fra due grandezze omogenee non dipende quindi dall'unità di misura in cui sono espresse ed è un **numero puro** che può essere naturale, razionale o irrazionale.
Esattamente il rapporto fra due grandezze omogenee è un numero:

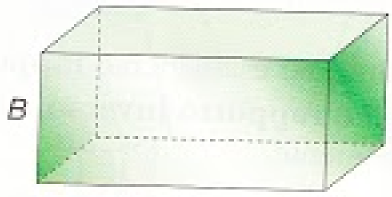
- **naturale** se una grandezza è multipla dell'altra:

$\overline{AB} = 90$ cm $\qquad \overline{CD} = 18$ cm $\qquad AB : CD = 90 : 18 = \mathbf{5}$

Il segmento AB è 5 volte il segmento CD, cioè è multiplo di CD secondo il numero 5.

- **razionale** se le due grandezze sono una la frazione dell'altra, cioè ammettono un sottomultiplo comune:

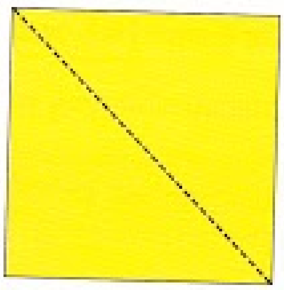




Volume $A = 72$ cm^3 $\qquad$ Volume $B = 48$ cm^3 $\qquad A : B = 72 : 48 = \mathbf{\frac{3}{2}}$

Il volume di A è i $\frac{3}{2}$ del volume di B, le due grandezze ammettono un sottomultiplo comune, il loro M.C.D., che è 24. Il volume del primo solido è, infatti, $24 \times 3 = 72$ cm^3 e quello del secondo $24 \times 2 = 48$ cm^3.

- **irrazionale** se le due grandezze non ammettono alcun sottomultiplo:



l = lato del quadrato = 3 cm
d = diagonale del quadrato (per il teorema di Pitagora) $= l\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm

$$d : l = 3\sqrt{2} : 3 = \sqrt{\mathbf{2}}$$

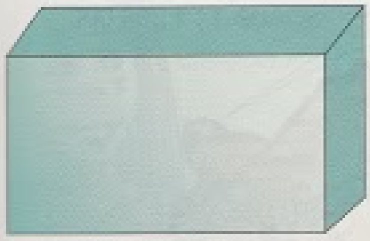
Le due grandezze non ammettono alcun sottomultiplo comune.

Diciamo quindi che:

- Il rapporto fra due grandezze **omogenee** è il quoziente fra le loro misure (riferite alla stessa unità di misura) ed è un **numero puro** appartenente all'insieme dei numeri reali assoluti (naturale, razionale o irrazionale).
- Grandezze il cui rapporto è un numero naturale o razionale si dicono **commensurabili**, ammettono cioè un sottomultiplo comune.
- Grandezze il cui rapporto è un numero irrazionale si dicono **incommensurabili**, non ammettono cioè un sottomultiplo comune.

Rapporto fra grandezze non omogenee

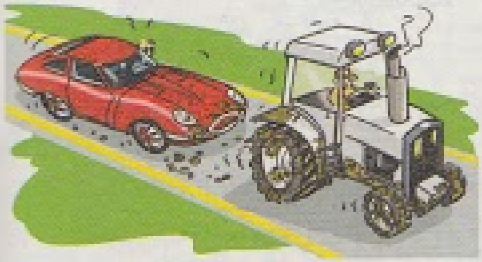
- Consideriamo due grandezze non omogenee, per esempio il peso di un oggetto e il suo volume:



peso = 35 kg
volume = 2,5 dm³
peso : volume = 35 kg : 2,5 dm³ = 14 kg/dm³

Se ne facciamo il rapporto otteniamo un'altra grandezza, il **peso specifico**, che dipende dalle unità di misura del peso e del volume.

- Consideriamo altre due grandezze non omogenee, per esempio la distanza percorsa e il tempo impiegato:



distanza = 270 km
tempo impiegato = 3 h
distanza : tempo = 270 km : 3 h = = 90 km/h

Facendone il rapporto otteniamo un'altra grandezza, la **velocità media**, che dipende dalle unità di misura della distanza percorsa e del tempo impiegato.

Diciamo quindi che:

> Il rapporto fra due grandezze **non omogenee** è il quoziente fra le loro misure ed è un'altra grandezza, **grandezza derivata**, non omogenea a quelle date e il cui valore dipende dalle unità di misura delle due grandezze.

Per un primo controllo

1. Scrivi quanto richiesto:
- Il rapporto 9 a 4: ....
- Il rapporto che ha 5 come conseguente e 3 come antecedente: ....

2. Completa:
Fra 12 e 7 il rapporto diretto è ...., il rapporto inverso è ....

3. I numeri dati rappresentano il rapporto fra due grandezze commensurabili o incommensurabili? Scrivilo accanto a ciascuno di essi:

27 ....; $\frac{5}{9}$ ....; 12,7 ....; $\sqrt{11}$ ....

Due rapporti uguali

Mario e Pietro, giocando con un videogioco, hanno ottenuto i seguenti risultati:

Mario: 15 partite vinte su 20 partite giocate;

Pietro: 12 partite vinte su 16 partite giocate.

Chi è stato più bravo? Una valutazione frettolosa potrebbe farci rispondere "Mario", che ne ha vinte più di Pietro; in effetti, per rispondere con precisione, bisogna riferirsi al rapporto *partite vinte/partite giocate* di ogni giocatore:

Mario $15 : 20 = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{20}_{4}} = \frac{3}{4}$ (1) Pietro $12 : 16 = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{16}_{4}} = \frac{3}{4}$ (2)

I due rapporti sono uguali, per cui diremo che Mario e Pietro sono stati ugualmente bravi. Infatti *in proporzione* alle partite giocate è come se entrambi ne avessero vinte 3 ogni 4 giocate.

Poiché i due rapporti (1) e (2) sono uguali, possiamo scrivere:

$$15 : 20 = 12 : 16$$

Un'uguaglianza di questo tipo si chiama **proporzione**.
Diremo quindi:

> Una proporzione è l'uguaglianza di due rapporti.

Dati quindi quattro numeri, per esempio 20, 5, 32 e 8, se sono tali che il rapporto fra i primi due (20 : 5 = 4) e il rapporto fra gli ultimi due (32 : 8 = 4) risulta uguale, possiamo sempre scrivere una proporzione:

$$20 : 5 = 32 : 8$$

In essa:

- i **quattro numeri** 20, 5, 32 e 8 sono i **termini** della proporzione;
- il **1°** e il **3°** numero, 20 e 32, sono gli **antecedenti**;
- il **2°** e il **4°** numero, 5 e 8, sono i **conseguenti**;
- il **1°** e il **4°** numero, 20 e 8, sono gli **estremi**;
- il **2°** e il **3°** numero, 5 e 32, sono i **medi**;
- il 4° numero, 8, è il **quarto proporzionale**.

20 : 5 = 32 : 8

estremi medi

20 : 5 = 32 : 8

antecedenti conseguenti

termini

$\underbrace{20 : 5 = 32 : 8}_{}$ → quarto proporzionale

Tale proporzione la leggeremo:

20	:	5	=	32	:	8	(venti sta a cinque come trentadue sta a otto)
	sta a		come		sta a		

Consideriamo i quattro numeri 27, 9, 9, 3; essi sono tali che $27 : 9 = 3$ e $9 : 3 = 3$, per cui possiamo scrivere la proporzione:

$$27 : 9 = 9 : 3$$

In essa, come vedi, i medi sono uguali; una proporzione di questo tipo, avente i medi (o gli estremi) uguali, si dice **continua**. Il numero 9 prende il nome di **medio proporzionale** e il numero 3 prende il nome di **terzo proporzionale**.

Proprietà delle proporzioni

Prendiamo in esame adesso le proprietà di una proporzione che ci permetteranno, come vedremo, di risolvere una proporzione, cioè di calcolare un suo termine conoscendo gli altri.

La proprietà fondamentale

Esaminiamo una proporzione, per esempio $18 : 2 = 27 : 3$, e scriviamola nel seguente modo:

$$\frac{18}{2} = \frac{27}{3}$$

Riduciamo le due frazioni al m.c.d., che è 6; otteniamo:

$$\frac{18 \times 3}{6} = \frac{27 \times 2}{6}$$

Osserviamo i due numeratori; non sono altro che:

- il prodotto degli estremi, 18×3;
- il prodotto dei medi, 27×2.

Essi sono necessariamente uguali; infatti $18 \times 3 = 54$ e $27 \times 2 = 54$.

Esprimiamo tutto ciò con la **proprietà fondamentale delle proporzioni**:

> In ogni proporzione il prodotto degli estremi è sempre uguale al prodotto dei medi.
>
> Se $a : b = c : d$ allora $a \times d = b \times c$

Esempi...

1. $25 : 5 = 15 : 3 \longrightarrow 25 \times 3 = 5 \times 15$

   $75 = 75$

2. $18 : 3 = 24 : 4 \longrightarrow 18 \times 4 = 3 \times 24$

   $72 = 72$

Una prima applicazione della proprietà fondamentale consiste nel poter verificare, mediante la sua applicazione, se quattro numeri dati in un certo ordine formano o no una proporzione.

Esempi...

1. Dati i numeri 7, 2, 14, 4, controllare se è possibile scrivere la proporzione $7 : 2 = 14 : 4$.
   Basterà verificare se *il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi*:
   $7 \times 4 = 28 \qquad 2 \times 14 = 28$
   Possiamo allora affermare che i quattro numeri, nell'ordine in cui sono dati, formano una proporzione.

2. Dati i quattro numeri razionali $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{15}{8}$, controllare se è vera la proporzione: $\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{9}{4} : \frac{15}{8}$.

   $\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{4} = \frac{3}{4}$

   I quattro numeri nell'ordine in cui sono dati formano una proporzione.

Per un primo controllo

1. Della proporzione $6 : 3 = 8 : 4$ individua:
   gli antecedenti ....; i conseguenti ....; i medi ....; gli estremi ....; il quarto proporzionale ....
2. Della proporzione $10 : 20 = 20 : 40$ individua:
   il medio proporzionale ....; il terzo proporzionale ....
3. Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni stabilisci quali dei seguenti gruppi di numeri formano, nell'ordine in cui sono dati, una proporzione:
   3, 8, 6, 16 .... una proporzione;
   9, 2, 27, 18 .... una proporzione;
   17, 2, 34, 6 .... una proporzione;
   15, 20, 6, 8 .... una proporzione.

Proprietà dell'invertire

Consideriamo la proporzione $27 : 3 = 36 : 4$ e riscriviamola scambiando in essa ogni antecedente con il proprio conseguente:

$$3 : 27 = 4 : 36$$

Possiamo affermare di aver scritto ancora una proporzione vera? Sì! Infatti, applicando la proprietà fondamentale, abbiamo:

$$\underbrace{3 \times 36 = 108}_{\text{prodotto estremi}} \quad = \quad \underbrace{27 \times 4 = 108}_{\text{prodotto medi}}$$

Esprimiamo ciò con la **proprietà dell'invertire**, che dice:

> Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene ancora una proporzione.
>
> Se $\boldsymbol{a : b = c : d}$ allora $\boldsymbol{b : a = d : c}$

Proprietà del permutare

- Consideriamo una proporzione, per esempio $49 : 7 = 21 : 3$, e riscriviamola scambiando tra di loro gli estremi:

$$3 : 7 = 21 : 49$$

Possiamo affermare di aver scritto ancora una proporzione vera? Sì! Infatti, applicando la proprietà fondamentale, abbiamo:

$$\underbrace{3 \times 49 = 147}_{\text{prodotto estremi}} \quad = \quad \underbrace{7 \times 21 = 147}_{\text{prodotto medi}}$$

- Consideriamo la stessa proporzione $49 : 7 = 21 : 3$ e riscriviamola scambiando tra loro i medi:

$$49 : 21 = 7 : 3$$

Possiamo affermare di aver scritto ancora una proporzione vera? Sì! Anche qui abbiamo:

$$49 \times 3 = 147 \quad \text{e} \quad 21 \times 7 = 147$$

- Consideriamo ancora la proporzione $49 : 7 = 21 : 3$ e riscriviamola scambiando tra loro gli estremi e i medi:

$$3 : 21 = 7 : 49$$

Possiamo affermare di aver scritto ancora una proporzione vera? Sì! Infatti:

$$3 \times 49 = 147 \quad \text{e} \quad 21 \times 7 = 147$$

Esprimiamo i risultati dei nostri esempi con la **proprietà del permutare**:

> Se in una proporzione si scambiano tra loro gli estremi o i medi o entrambi si ottengono ancora altre proporzioni.
>
> $$\text{Se } \boldsymbol{a : b = c : d} \qquad \text{allora} \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{d : b = c : a}\\ &\boldsymbol{a : c = b : d}\\ &\boldsymbol{d : c = b : a} \end{aligned}$$

Proprietà del comporre

Consideriamo una proporzione, per esempio 10 : 2 = 35 : 7, e scriviamone un'altra (controlleremo poi se sarà vera o no) tale che:

- il primo termine sia la somma del primo e del secondo termine della proporzione di partenza, cioè 10 + 2;
- il secondo termine sia il primo o il secondo termine, cioè 10 o 2 (scegliamo il primo, 10);
- il terzo termine sia la somma del terzo e del quarto termine, cioè 35 + 7;
- il quarto termine sia il terzo o il quarto in analogia con il secondo termine, cioè, se per il secondo termine abbiamo scelto l'antecedente 10, adesso prenderemo l'antecedente 35.

Possiamo scrivere allora:

$$\begin{array}{ccccccc} (10+2) & : & 10 & = & (35+7) & : & 35 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \textbf{somma} & & \textbf{antecedente} & & \textbf{somma} & & \textbf{antecedente} \\ \textbf{1° e 2°} & & & & \textbf{3° e 4°} & & \\ \textbf{termine} & & & & \textbf{termine} & & \end{array}$$

cioè: 12 : 10 = 42 : 35.

È ancora una proporzione? Controlliamo applicando la proprietà fondamentale:

$$\begin{array}{ccc} 12 \times 35 = 420 & & 10 \times 42 = 420 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{prodotto estremi} & = & \text{prodotto medi} \end{array}$$

Abbiamo ottenuto ancora una proporzione.

Ciò si esprime esattamente con la **proprietà del comporre**, che dice:

> In ogni proporzione la somma del 1° e del 2° termine sta al primo o al secondo termine come la somma del 3° e del 4° termine sta al 3° o al 4° termine.
>
> $$\text{Se } \boldsymbol{a : b = c : d} \qquad \text{allora} \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{(a+b) : a = (c+d) : c}\\ &\boldsymbol{(a+b) : b = (c+d) : d} \end{aligned}$$

Esempi...

1. Data la proporzione 72 : 8 = 63 : 7, applicare la proprietà del comporre in entrambi i modi.

$(72 + 8) : 72 = (63 + 7) : 63$ e $(72 + 8) : 8 = (63 + 7) : 7$

$80 : 72 = 70 : 63$ e $80 : 8 = 70 : 7$

Controlliamo con la proprietà fondamentale che le due uguaglianze ottenute siano effettivamente delle proporzioni:

$\begin{cases} 80 \times 63 = 5\,040 \\ 72 \times 70 = 5\,040 \end{cases}$ e $\begin{cases} 80 \times 7 = 560 \\ 8 \times 70 = 560 \end{cases}$

2. Data la proporzione $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{1}{4} : \frac{3}{20}$, applicare la proprietà del comporre in entrambi i modi.

$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{20}\right) : \frac{1}{4}$ e $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{20}\right) : \frac{3}{20}$

$\frac{5+3}{15} : \frac{1}{3} = \frac{5+3}{20} : \frac{1}{4}$ e $\frac{5+3}{15} : \frac{1}{5} = \frac{5+3}{20} : \frac{3}{20}$

$\frac{8}{15} : \frac{1}{3} = \frac{8}{20} : \frac{1}{4}$ e $\frac{8}{15} : \frac{1}{5} = \frac{8}{20} : \frac{3}{20}$

Controlliamo con la proprietà fondamentale che le due uguaglianze ottenute siano effettivamente delle proporzioni:

$\begin{cases} \frac{\cancel{8}^{2}}{15} \times \frac{1}{\cancel{4}_{1}} = \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{20}_{5}} = \frac{2}{15} \end{cases}$ e $\begin{cases} \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{15}_{5}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{20}_{5}} = \frac{2}{25} \\ \frac{1}{5} \times \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{20}_{5}} = \frac{2}{25} \end{cases}$

Proprietà dello scomporre

Consideriamo una proporzione dove ogni antecedente è maggiore del proprio conseguente, per esempio 27 : 9 = 18 : 6, e scriviamone un'altra (controlleremo poi se sarà vera o no) tale che:

- il primo termine sia la differenza fra il primo e il secondo termine della proporzione di partenza, cioè 27 − 9;
- il secondo termine sia il primo o il secondo termine, cioè 27 o 9 (scegliamo il secondo, ossia 9);
- il terzo termine sia la differenza fra il terzo e il quarto, cioè 18 − 6;
- il quarto termine sia il terzo o il quarto in analogia con il secondo termine (avendo scelto come secondo termine il conseguente 9, prenderemo adesso l'altro conseguente 6).

Possiamo allora scrivere:

$$\underbrace{(27-9)}_{\text{differenza 1° e 2° termine}} : \underbrace{9}_{\text{conseguente}} = \underbrace{(18-6)}_{\text{differenza 3° e 4° termine}} : \underbrace{6}_{\text{conseguente}}$$

cioè: 18 : 9 = 12 : 6.

È ancora una proporzione? Controlliamolo con la proprietà fondamentale:

$$\underbrace{18\times 6=108}_{\text{prodotto estremi}} = \underbrace{9\times 12=108}_{\text{prodotto medi}}$$

Ciò si esprime esattamente con la **proprietà dello scomporre**, che dice:

> In ogni proporzione (con gli antecedenti maggiori dei rispettivi conseguenti) la differenza del 1° e 2° termine sta al 1° o al 2° termine come la differenza del 3° e 4° termine sta al 3° o al 4° termine.
>
> Se $a : b = c : d$ allora $(a-b) : a = (c-d) : c$
>
> $(a-b) : b = (c-d) : d$

Esempi...

1. Data la proporzione 100 : 10 = 30 : 3, applicare la proprietà dello scomporre in entrambi i modi.

$(100-10) : 100 = (30-3) : 30$ e $(100-10) : 10 = (30-3) : 3$

$90 : 100 = 27 : 30$ e $90 : 10 = 27 : 3$

Controlliamo con la proprietà fondamentale che le due ottenute siano delle proporzioni:

$$\begin{cases} 90\times 30 = 2\,700 \\ 100\times 27 = 2\,700 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 90\times 3 = 270 \\ 10\times 27 = 270 \end{cases}$$

2. Data la proporzione $\frac{5}{4}:\frac{1}{2}=\frac{5}{6}:\frac{1}{3}$, applicare la proprietà dello scomporre in entrambi i modi.

$$\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{5}{4}=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right):\frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{3}$$

$$\frac{5-2}{4}:\frac{5}{4}=\frac{5-2}{6}:\frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \frac{5-2}{4}:\frac{1}{2}=\frac{5-2}{6}:\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{4}=\frac{3}{6}:\frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{6}:\frac{1}{3}$$

Controlliamo con la proprietà fondamentale che le due ottenute siano delle proporzioni:

$$\begin{cases} \frac{\cancel{3}^1}{4}\times\frac{5}{\cancel{6}_2}=\frac{5}{8} \\ \frac{5}{4}\times\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}_2}=\frac{5}{8} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\cancel{3}^1}{4}\times\frac{1}{\cancel{3}_1}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}_2}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Le proprietà del comporre e dello scomporre possono essere applicate considerando la somma o la differenza degli antecedenti e dei conseguenti. Valgono infatti anche le seguenti regole:

> In ogni proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.
>
> Se $\boldsymbol{a : b = c : d}$ allora $\boldsymbol{(a + c) : (b + d) = a : b}$
> $\boldsymbol{(a + c) : (b + d) = c : d}$
>
> In ogni proporzione (con il primo antecedente e il primo conseguente maggiori rispettivamente del secondo antecedente e del secondo conseguente) la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.
>
> Se $\boldsymbol{a : b = c : d}$ allora $\boldsymbol{(a - c) : (b - d) = a : b}$
> $\boldsymbol{(a - c) : (b - d) = c : d}$

Risoluzione di una proporzione

Per risolvere una proporzione, cioè per calcolare un termine mancante conoscendo gli altri, si applicano le proprietà che abbiamo esaminato. Il termine mancante è detto **termine incognito** e si indica con $\boldsymbol{x}$. Impariamo i vari procedimenti risolutivi di una proporzione attraverso alcuni esempi.

Calcolo di un estremo o di un medio

Se il termine incognito è un estremo o un medio, basta applicare la proprietà fondamentale. Osserva.

- Nella proporzione $\mathbf{54 : 6 = 108 :} \boldsymbol{x}$ deve essere: $54 \cdot x = 6 \cdot 108$ da cui: $54 \cdot x = 648$ e da questa avremo:

  $$x = \frac{648}{54} = 12$$

  Per cui la nostra proporzione sarà: $\mathbf{54 : 6 = 108 : 12}$; infatti:

  $$\begin{cases} 54 \cdot 12 = 648 \\ 6 \cdot 108 = 648 \end{cases}$$ prodotto estremi = prodotto medi

- Nella proporzione $\mathbf{121 :} \boldsymbol{x} \mathbf{= 143 : 13}$ deve essere: $121 \cdot 13 = x \cdot 143$ da cui: $1573 = x \cdot 143$ e da questa avremo:

  $$x = \frac{1573}{143} = 11$$

  Per cui la nostra proporzione sarà: $\mathbf{121 : 11 = 143 : 13}$; infatti:

  $$\begin{cases} 121 \cdot 13 = 1573 \\ 11 \cdot 143 = 1573 \end{cases}$$ prodotto estremi = prodotto medi

In generale diciamo quindi che:

> In una proporzione il valore di un estremo incognito è dato dal prodotto dei medi diviso l'estremo conosciuto.
>
> La ricerca dell'estremo x nel caso della proporzione $a : b = c : x$ viene chiamata ricerca del **quarto proporzionale** dopo tre numeri dati.
>
> In una proporzione il valore di un medio incognito è dato dal prodotto degli estremi diviso il medio conosciuto.

Esempio...

Calcolare il termine incognito nelle seguenti proporzioni:

$7 : 3 = 21 : x$; $\quad 24 : 9 = x : 3$; $\quad \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = x : \frac{64}{45}$; $\quad \frac{14}{15} : \frac{13}{3} = \frac{21}{26} : x$

- $7 : 3 = 21 : x \rightarrow x = \frac{3 \cdot 21}{7} = 9$ da cui: $7 : 3 = 21 : 9$
- $24 : 9 = x : 3 \rightarrow x = \frac{24 \cdot 3}{9} = 8$ da cui: $24 : 9 = 8 : 3$
- $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = x : \frac{64}{45} \rightarrow x = \left(\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{64}^{32}}{\cancel{45}_{15}}\right) : \frac{4}{3} = \frac{\cancel{32}^8}{\cancel{15}_5} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} = \frac{8}{5}$ da cui: $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{8}{5} : \frac{64}{45}$
- $\frac{14}{15} : \frac{13}{3} = \frac{21}{26} : x \rightarrow x = \left(\frac{\cancel{13}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{21}^7}{\cancel{26}_2}\right) : \frac{14}{15} = \frac{\cancel{7}^1}{2} \cdot \frac{15}{\cancel{14}_2} = \frac{15}{4}$ da cui: $\frac{14}{15} : \frac{13}{3} = \frac{21}{26} : \frac{15}{4}$

Per un primo controllo

1. Individua quali proprietà sono state applicate alla proporzione $12 : 6 = 8 : 4$.

$12 : 8 = 6 : 4$ proprietà ....;

$(12 - 6) : 6 = (8 - 4) : 4$ proprietà ....;

$6 : 12 = 4 : 8$ proprietà ....;

$4 : 6 = 8 : 12$ proprietà ....

2. Completa la seguente tabella scrivendo la soluzione di ogni proporzione.

Proporzione	Soluzione	Proporzione	Soluzione
$a : b = c : x$		$x : b = c : d$	
$a : b = x : d$		$a : x = c : d$	

Risoluzione di una proporzione continua

Consideriamo una proporzione continua e in essa siano incogniti i due medi, che sappiamo devono essere uguali (medi proporzionali); sia, per esempio:

$4 : x = x : 25.$

Anche in questa proporzione deve essere verificata la proprietà fondamentale, per cui deve essere:

$4 \cdot 25 = x^2$ cioè: $100 = x^2$ da cui: $x = \sqrt{100} = 10.$

La nostra proporzione sarà: **4 : 10 = 10 : 25**, infatti:

$$\begin{cases} 4 \cdot 25 = 100 \\ 10 \cdot 10 = 100 \end{cases}$$

Possiamo dedurre la regola generale che dice:

> In una proporzione continua il valore del medio proporzionale è dato dalla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Esempi...

1. $169 : x = x : 4 \rightarrow x = \sqrt{169 \cdot 4} = \sqrt{676} = 26$

2. $\frac{4}{9} : x = x : \frac{25}{4} \rightarrow x = \sqrt{\frac{\cancel{4}^{1}}{9} \cdot \frac{25}{\cancel{4}_{1}}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

Risoluzione di particolari proporzioni

Le proporzioni con un termine incognito possono essere date anche in forma diversa da quelle considerate. Osserviamo come è possibile risolverle.

- Consideriamo la seguente proporzione: $(21 + x) : x = 24 : 6$ e cerchiamo di risolverla.
  Applicando la proprietà dello scomporre, avremo:
  $(21 + \cancel{x} - \cancel{x}) : x = (24 - 6) : 6$ da cui: $21 : x = 18 : 6$
  quindi: $x = \frac{21 \cdot 6}{18} = 7$
  La nostra proporzione sarà: $(21 + 7) : 7 = 24 : 6$ cioè: **28 : 7 = 24 : 6**.
- Consideriamo la seguente proporzione: $(35 - x) : x = 12 : 2$.
  Applicando la proprietà del comporre, avremo:
  $(35 - \cancel{x} + \cancel{x}) : x = (12 + 2) : 2$ da cui: $35 : x = 14 : 2$
  quindi: $x = \frac{35 \cdot 2}{14} = 5$
  La nostra proporzione sarà: $(35 - 5) : 5 = 12 : 2$ cioè: **30 : 5 = 12 : 2**.

- Consideriamo una proporzione del tipo $x : y = a : b$, dove a e b sono due numeri noti; in essa i termini mancanti sono due (indicati dalle lettere x e y); la potremo risolvere solo se di questi due termini conosciamo la somma o la differenza. Esaminiamo separatamente le due possibilità.

1) Consideriamo la proporzione $x : y = 5 : 7$ e supponiamo di conoscere la somma delle incognite, cioè:

$x : y = 5 : 7$ con $x + y = 24$ (1)

Applichiamo la proprietà del comporre:

$(x + y) : x = (5 + 7) : 5$

sostituiamo la somma conosciuta:

$24 : x = 12 : 5$ da cui: $x = \dfrac{24 \cdot 5}{12} = 10$

Trovato il valore della x, per trovare il valore della y basta ricorrere alla (1); in essa:

$y = 24 - x$ cioè $y = 24 - 10 = 14$

La nostra proporzione è $\mathbf{10 : 14 = 5 : 7}$.

2) Consideriamo ora la proporzione $x : y = 4 : 3$ e supponiamo di conoscere la differenza tra le incognite, cioè:

$x : y = 4 : 3$ con $x - y = 6$ (2)

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$(x - y) : x = (4 - 3) : 4$

sostituiamo la differenza conosciuta:

$6 : x = 1 : 4$ da cui: $x = \dfrac{6 \cdot 4}{1} = 24$

Trovato il valore della x, per trovare il valore della y basta ricorrere alla (2); in essa:

$y = x - 6$ cioè: $y = 24 - 6 = 18$

La nostra proporzione è $\mathbf{24 : 18 = 4 : 3}$.

Esempi...

1. $(5 + x) : x = 12 : 3$

$(5 + x - x) : x = (12 - 3) : 3$

$5 : x = 9 : 3$

$x = \dfrac{5 \cdot 3}{9} = \mathbf{\dfrac{5}{3}}$

2. $(6 - x) : x = 22 : 8$

$(6 - x + x) : x = (22 + 8) : 8$

$6 : x = 30 : 8$

$x = \dfrac{6 \cdot 8}{30} = \mathbf{\dfrac{8}{5}}$

3. $\left(\dfrac{1}{4} + x\right) : x = \dfrac{21}{4} : \dfrac{7}{2}$

$\left(\dfrac{1}{4} + x - x\right) : x = \left(\dfrac{21}{4} - \dfrac{7}{2}\right) : \dfrac{7}{2}$

$\dfrac{1}{4} : x = \dfrac{21 - 14}{4} : \dfrac{7}{2}$

$\dfrac{1}{4} : x = \dfrac{7}{4} : \dfrac{7}{2}$

$x = \left(\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{7}{2}\right) : \dfrac{7}{4} = \dfrac{\cancel{7}^1}{\cancel{8}_2} \cdot \dfrac{\cancel{4}^1}{\cancel{7}_1} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

→

4. $\left(\frac{7}{5}-x\right):x=\frac{15}{8}:\frac{3}{4}$

$\left(\frac{7}{5}-x+x\right):x=\left(\frac{15}{8}+\frac{3}{4}\right):\frac{3}{4}$

$\frac{7}{5}:x=\frac{15+6}{8}:\frac{3}{4}$

$\frac{7}{5}:x=\frac{21}{8}:\frac{3}{4}$

$x=\left(\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{21}{8}=\frac{\cancel{21}^1}{\cancel{20}_5}\cdot\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{21}_1}=\frac{2}{5}$

5. $x:y=4:5$ con $x+y=90$

$(x+y):y=(4+5):5$

$90:y=9:5$

$y=\frac{90\cdot5}{9}=50$

$x=90-y=90-50=40$

6. $x:y=9:5$ con $x-y=20$

$(x-y):y=(9-5):5$

$20:y=4:5$

$y=\frac{20\cdot5}{4}=25$

$x=20+y=20+25=45$

7. $x:y=\frac{3}{5}:2$ con $x+y=\frac{13}{25}$

$(x+y):y=\left(\frac{3}{5}+2\right):2$

$\frac{13}{25}:y=\frac{13}{5}:2$

$y=\left(\frac{13}{25}\cdot2\right):\frac{13}{5}=\frac{\cancel{26}^2}{\cancel{25}_5}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{13}_1}=\frac{2}{5}$

$x=\frac{13}{25}-y=\frac{13}{25}-\frac{2}{5}=\frac{13-10}{25}=\frac{3}{25}$

8. $x:y=\frac{2}{3}:\frac{1}{18}$ con $x-y=\frac{11}{2}$

$(x-y):y=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{18}\right):\frac{1}{18}$

$\frac{11}{2}:y=\frac{11}{18}:\frac{1}{18}$

$y=\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{18}\right):\frac{11}{18}=\frac{\cancel{11}^1}{\cancel{36}_2}\cdot\frac{\cancel{18}^1}{\cancel{11}_1}=\frac{1}{2}$

$x=\frac{11}{2}+y=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\cancel{12}^6}{\cancel{2}_1}=6$

Catena di rapporti

Oltre all'uguaglianza di due soli rapporti si può considerare l'uguaglianza di tre o più rapporti. Per esempio, dati i tre rapporti uguali 20 : 5, 16 : 4 e 24 : 6 possiamo scrivere l'uguaglianza:

$$20:5=16:4=24:6$$

che si chiama **catena di rapporti**.

Ad una catena di rapporti si può applicare la proprietà del comporre. Osserva in che modo la si applica partendo dalla catena di rapporti:

$$4:2=12:6=16:8=36:18$$

- $(4+12+16+36):(2+6+8+18)=4:2 \rightarrow 68:34=4:2$
- $(4+12+16+36):(2+6+8+18)=12:6 \rightarrow 68:34=12:6$
- $(4+12+16+36):(2+6+8+18)=16:8 \rightarrow 68:34=16:8$
- $(4+12+16+36):(2+6+8+18)=36:18 \rightarrow 68:34=36:18$

Esercizi per contenuti

Quantità in... rapporto

1. Che cosa si intende per rapporto diretto fra due numeri? E per rapporto inverso?

2. Come si chiamano i termini di un rapporto?

3. Considera il rapporto numerico fra a e b e segna il completamento esatto giustificando la risposta:

a) se $a > b$ il rapporto è
- > 1 ☐
- $= 1$ ☐
- < 1 ☐

b) se $a < b$ il rapporto è
- > 1 ☐
- $= 1$ ☐
- < 1 ☐

4. Scrivi cinque coppie di numeri aventi per rapporto 5.

5. Scrivi cinque coppie di numeri aventi per rapporto 4/9.

Calcola il rapporto fra i numeri di ciascuna coppia data negli esercizi seguenti.

6. 21 e 5; 18 e 3; 27 e 2.

7. 15 e 5; 22 e 12; 11 e 9.

8. 35 e 5; 120 e 60; 18 e 4.

9. 29 e 3; 56 e 6; 54 e 9.

10. 28 e 35; 21 e 24; 16 e 40.

11. 50 e 80; 24 e 48; 50 e 55.

12. 56 e 24; 55 e 33; 45 e 30.

---

13. $3\sqrt{3}$ e $12\sqrt{3}$; $12\sqrt{3}$ e 24; $18\sqrt{6}$ e $9\sqrt{2}$. $\left[\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 2\sqrt{3}\right]$

14. $14\sqrt{3}$ e $7\sqrt{2}$; $8\sqrt{10}$ e $7\sqrt{2}$; $3\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ \frac{8\sqrt{5}}{7};\ 3\sqrt{2}\right]$

15. $\frac{3}{4}$ e 5; $\frac{7}{2}$ e 21; $\frac{14}{3}$ e 7. $\left[\frac{3}{20};\ \frac{1}{6};\ \frac{2}{3}\right]$

16. 25 e $\frac{5}{4}$; 18 e $\frac{14}{3}$; 27 e $\frac{9}{5}$. $\left[20;\ \frac{27}{7};\ 15\right]$

17. $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$; $\frac{20}{3}$ e $\frac{5}{18}$; $\frac{18}{5}$ e $\frac{3}{10}$. $\left[\frac{8}{15};\ 24;\ 12\right]$

18. $\frac{4}{9}$ e $\frac{16}{3}$; $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{20}$; $\frac{7}{3}$ e $\frac{49}{27}$. $\left[\frac{1}{12};\ \frac{4}{3};\ \frac{9}{7}\right]$

19. 0,7 e 0,9; 3,5 e 2,8; 1,2 e 0,8. $\left[\frac{7}{9};\ \frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right]$

20. $5{,}0$ e $6{,}\bar{6}$; $0{,}\bar{8}$ e $0{,}3\bar{8}$; $5{,}3$ e $0{,}\bar{6}$. $\left[\frac{3}{4};\ \frac{16}{7};\ 7{,}95\right]$

21. $0{,}\bar{3}$ e $1{,}\bar{5}$; $1{,}2\bar{7}$ e $2{,}\bar{7}$; $1{,}\bar{8}$ e $0{,}1\bar{8}$. $\left[\frac{3}{14};\ \frac{23}{50};\ 10\right]$

Calcola il rapporto diretto e il rapporto inverso fra i numeri di ciascuna coppia data negli esercizi seguenti.

22. $\frac{2}{5}$ e $\frac{9}{15}$; $\quad \frac{9}{7}$ e $\frac{14}{3}$; $\quad \frac{21}{6}$ e $\frac{28}{16}$.

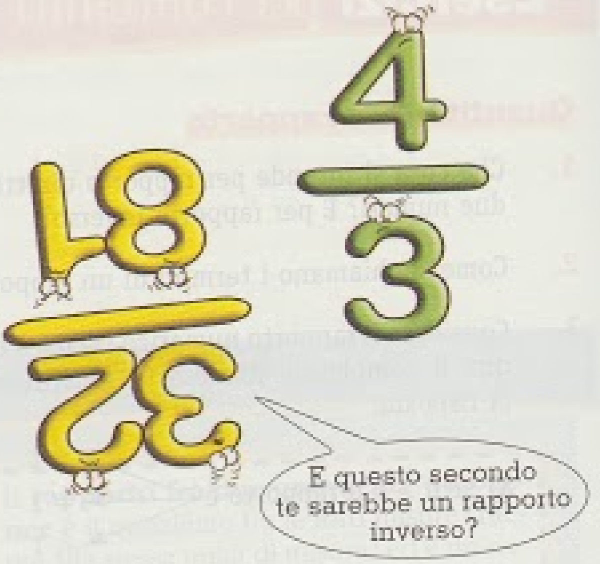
23. $\frac{15}{2}$ e $\frac{21}{8}$; $\quad \frac{121}{3}$ e $\frac{11}{27}$; $\quad \frac{60}{13}$ e $\frac{12}{69}$.

24. $\frac{8}{21}$ e $\frac{40}{3}$; $\quad \frac{56}{7}$ e $\frac{14}{9}$; $\quad \frac{81}{10}$ e $\frac{25}{6}$.

25. $\frac{39}{4}$ e $\frac{13}{8}$; $\quad \frac{25}{9}$ e $\frac{30}{18}$; $\quad \frac{42}{5}$ e $\frac{44}{25}$.

26. $\frac{35}{27}$ e $\frac{28}{9}$; $\quad \frac{16}{7}$ e $\frac{24}{35}$; $\quad \frac{4}{3}$ e $\frac{32}{81}$.

27. $\frac{27}{11}$ e $\frac{9}{77}$; $\quad \frac{8}{15}$ e $\frac{56}{21}$; $\quad \frac{10}{9}$ e $\frac{40}{27}$.



Calcola il rapporto fra i seguenti termini.

28. $\frac{26}{3}$ e $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)$; $\quad \left(\frac{5}{6}-\frac{7}{18}\right)$ e $\frac{12}{15}$. $\quad \left[10;\ \frac{5}{9}\right]$

29. $\left(\frac{7}{15}-\frac{2}{5}\right)$ e $\frac{13}{45}$; $\quad \frac{11}{3}$ e $\left(4-\frac{9}{5}\right)$. $\quad \left[\frac{3}{13};\ \frac{5}{3}\right]$

30. $\left(\frac{1}{14}+\frac{2}{7}\right)$ e $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\right)$; $\quad \left(\frac{18}{45}-\frac{4}{15}\right)$ e $\left(\frac{14}{20}-\frac{8}{18}\right)$. $\quad \left[\frac{25}{49};\ \frac{12}{23}\right]$

31. $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\right)$ e $\left(\frac{2}{5}\times\frac{15}{3}-\frac{1}{6}\right)$ $\quad \left[\frac{15}{22}\right]$

32. $\left(\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{5}{7}:\frac{15}{14}+\frac{3}{5}\times\frac{10}{4}-\frac{1}{4}\right)$ $\quad \left[\frac{14}{23}\right]$

33. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$ e $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\quad \left[\frac{4}{9}\right]$

34. $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^3\times\frac{5}{3}\times\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^2$ e $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\times\frac{5}{3}\right]^2$ $\quad \left[\frac{25}{9}\right]$

35. $\left[\left(\frac{3}{11}\right)^0+\left(\frac{3}{11}\right)^4\times\left(\frac{3}{11}\right)^3:\left(\frac{3}{11}\right)^6\right]$ e $\frac{7}{11}$ $\quad [2]$

Determina quali rapporti, fra i quattro di ciascun esercizio, sono uguali tra loro.

36. 36 : 6; $\quad$ 48 : 4; $\quad$ 9 : 45; $\quad$ 66 : 11.

37. 28 : 7; $\quad$ 10 : 30; $\quad$ 12 : 3; $\quad$ 44 : 22.

38. 14 : 56; $\quad$ 9 : 50; $\quad$ 7 : 28; $\quad$ 36 : 216

39. $\frac{3}{5}:5$; $\quad \frac{1}{2}:1$; $\quad 1:\frac{25}{3}$; $\quad \frac{5}{3}:3$.

Per ogni numero dato nei seguenti esercizi scrivi un rapporto avente tale numero come valore.

Esempio...

$7{,}5 \rightarrow 15 : 2$

40. 3; 7; 9; 16.

41. $3{,}5$; $1{,}8$; $0{,}1$; $0{,}02$.

42. $0{,}\overline{8}$; $1{,}\overline{3}$; $1{,}\overline{23}$; $3{,}5$.

43. $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{9}$.

44. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{7}$.

Calcola l'antecedente incognito in ciascuno dei rapporti dei quali si conosce il valore.

45. $x : 5 = 2$; $x : 6 = 3$; $x : 5 = 6$.

46. $x : 2 = 7$; $x : 6 = 1$; $x : 8 = 12$.

47. $x : 2 = 9$; $x : 9 = 13$; $x : 3 = 0$.

48. $\frac{x}{7} = 5$; $\frac{x}{2} = 7$; $\frac{x}{5} = 9$.

49. $\frac{x}{2} = 6$; $\frac{x}{7} = 11$; $\frac{x}{11} = 4$.

50. $\frac{x}{5} = 10$; $\frac{x}{9} = 3$; $\frac{x}{4} = 16$.

51. $x : \frac{2}{7} = 5$; $x : \frac{7}{5} = 3$; $x : \frac{3}{4} = 11$.

52. $x : \frac{5}{6} = 8$; $x : \frac{2}{9} = 5$; $x : \frac{3}{2} = 6$.

53. $x : \frac{9}{4} = 12$; $x : \frac{7}{2} = 13$; $x : \frac{4}{15} = 20$.

54. $x : \frac{7}{2} = \frac{3}{4}$; $x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$; $x : \frac{6}{5} = \frac{10}{3}$.

55. $x : \frac{5}{3} = \frac{3}{10}$; $x : \frac{8}{5} = \frac{7}{4}$; $x : \frac{9}{7} = \frac{14}{27}$.

56. $x : \frac{5}{9} = \frac{15}{2}$; $x : \frac{7}{3} = \frac{2}{7}$; $x : \frac{5}{6} = \frac{18}{25}$.

57. $x : 0{,}5 = 3$; $x : 1{,}4 = 7$;
$x : 3{,}2 = 4$; $x : 1{,}3 = 6$.

58. $x : 0{,}1 = 3$; $x : 1{,}8 = 1{,}8$;
$x : 2{,}7 = 5$; $x : 0{,}4 = 0{,}1$.

59. $x : 3{,}5 = 0{,}01$; $x : 7{,}7 = 3{,}1$.

60. $x : 0{,}6 = 12$; $x : 0{,}04 = 150$.

Calcola il conseguente incognito in ciascuno dei rapporti dei quali si conosce il valore.

61. $28 : x = 4$; $42 : x = 7$; $39 : x = 3$.

62. $\frac{30}{x} = 6$; $\frac{77}{x} = 7$; $\frac{18}{x} = 6$.

63. $\frac{5}{2} : x = 6$; $\frac{4}{9} : x = 3$; $\frac{10}{5} : x = 3$.

64. $\frac{5}{4} : x = \frac{3}{2}$; $\frac{6}{25} : x = \frac{12}{15}$; $\frac{5}{23} : x = \frac{7}{46}$.

65. $\frac{7}{10} : x = \frac{4}{5}$; $\frac{16}{5} : x = \frac{8}{3}$; $\frac{21}{4} : x = \frac{7}{16}$.

66. $\frac{8}{9} : x = \frac{16}{3}$; $\frac{36}{15} : x = \frac{6}{5}$; $\frac{18}{5} : x = \frac{6}{7}$.

67. $0{,}7 : x = 5$; $1{,}2 : x = 2$.

68. $3{,}5 : x = 10$; $1{,}7 : x = 0{,}4$.

69. $3{,}2 : x = 0{,}8$; $5{,}4 : x = 0{,}9$.

Grandezze in... rapporto

Rapporto fra grandezze omogenee

70. Vero o falso?

a) Il rapporto fra due grandezze omogenee è una grandezza non omogenea a quelle date. V F

b) Il rapporto fra due grandezze omogenee è una grandezza omogenea a quelle date. V F

c) Il rapporto fra grandezze omogenee è un numero puro. V F

71. Il rapporto fra due grandezze omogenee è $1{,}\overline{2}$; come sono le due grandezze? Perché?

72. Il rapporto fra due grandezze omogenee è 15; come sono le due grandezze? Perché?

73. Il rapporto fra due grandezze omogenee è 5/7; come sono le due grandezze? Perché?

74. Il rapporto fra due grandezze omogenee è $\sqrt{3}$, come sono le due grandezze? Perché?

75. Disegna due segmenti tali che il loro rapporto sia 6.

76. Disegna due segmenti tali che il loro rapporto sia 1/3.

77. Disegna due segmenti tali che il loro rapporto sia 2/5.

Calcola il rapporto fra le grandezze omogenee indicate nei seguenti esercizi.

78. 16 m e 4 m; 15 dam e 20 dam; 3 km e 21 km.

79. 1 m e 1 mm; 1 km e 1 dm; 100 dm 300 cm.

80. 1 m e 5 dm; 5,6 km e 300 m; 500 dm e 300 m.

81. 12 dm^2 e 48 dm^2; 7 m^2 e 28 m^2; 6 hm^2 e 36 hm^2.

82. 1 m^2 e 1 dm^2; 1 hm^2 e 1 km^2; 1 m^2 e 1 km^2.

83. 40 m^2 e 200 dm^2; 3 hm^2 e 27 m^2; 2 500 m^2 e 1 km^2.

84. 20 g e 4 g; 36 hg e 24 hg; 7 kg e 49 kg.

85. 1 g e 7 cg; 1 kg e 1 dag; 1 g e 1 mg.

86. 5 g e 30 cg; 0,70 kg e 70 g; 5 dg e 250 mg.

87. I segmenti *AB* e *CD* misurano rispettivamente 30 cm e 24 cm. I due segmenti ammettono un sottomultiplo comune? Se la tua risposta è affermativa, completa l'uguaglianza: *AB* = ... *CD*.

88. I pesi di due persone, p(A) e p(B), sono tali per cui $p(A) = \frac{2}{3}p(B)$. Calcola il rapporto diretto e il rapporto inverso tra queste due grandezze. Il rapporto diretto esprime un'altra grandezza? E quello inverso? Se sì, quale?

89. Due segmenti *AB* e *CD* sono congruenti. Qual è il loro rapporto diretto? E il loro rapporto inverso? Possono *AB* e *CD* misurare rispettivamente 40 cm e 0,4 m?

90. I segmenti *AB* e *CD* sono tali che $\frac{1}{5}AB = \frac{1}{10}CD$. Calcola il rapporto diretto e indiretto.

91. Di due angoli complementari uno misura 65°. Calcola il rapporto fra i due angoli, quindi il loro rapporto inverso. Le misure dei due angoli ammettono un sottomultiplo comune? Quale?

92. Due angoli $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ sono tali che $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\hat{\beta}$. Calcola il loro rapporto diretto e il loro rapporto inverso. È possibile che $\hat{\alpha}$ misuri 45° e $\hat{\beta}$ misuri 30°?

93. Due superfici *A* e *B* sono tali che *A* = 6*B*; calcola il loro rapporto e il rapporto inverso. Possono *A* e *B* misurare rispettivamente 90 dm^2 e 15 cm^2? Perché?

94. Due angoli $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ sono in rapporto 3 : 5. È possibile che essi misurino 90° e 150°?

95. I lati di due quadrati misurano rispettivamente 33 cm e 36 cm. Calcola il rapporto delle misure dei lati, dei perimetri e delle aree dei due quadrati. **[11/12; 11/12; 121/144]**

96. Un rettangolo ha le dimensioni di 20 cm e 80 cm. Calcola il rapporto fra il suo perimetro e il perimetro di un quadrato a esso equivalente. **[5/4]**

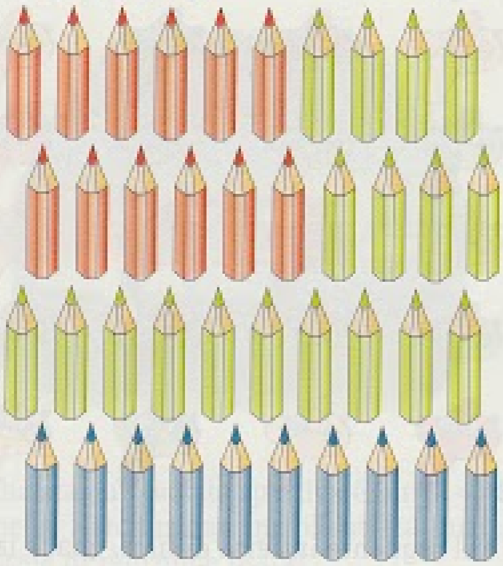
97. La base e l'altezza di un triangolo misurano rispettivamente 12 e 22 cm. Calcola il loro rapporto. Come diventa questo rapporto se l'area del triangolo diventa 288 cm^2 e la base rimane la stessa? **[6/11; 1/4]**

98. Due angoli $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ misurano rispettivamente 42° e 138°. Calcola il rapporto fra $\hat{\alpha}$ e un angolo piatto e fra $\hat{\beta}$ e un angolo piatto. La somma dei rapporti è uguale a 1? Perché?

99. Una cassa ha il peso lordo di 35 kg e la merce in essa contenuta pesa 32 kg. Calcola i rapporti:
- peso netto/peso lordo;
- tara/peso lordo.

La somma dei due rapporti è uguale a 1? Perché?

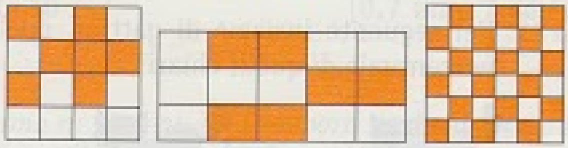
172. Nel seguente insieme di matite, qual è la percentuale di quelle blu, di quelle verdi e di quelle rosse?



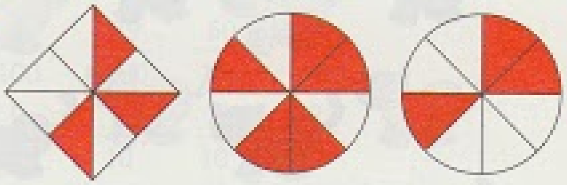
173. Nel seguente insieme di bicchieri, qual è la percentuale di quelli pieni?

Esprimi la percentuale delle parti colorate nelle figure dei seguenti esercizi.

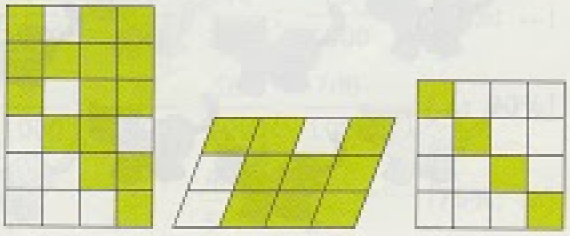
174.



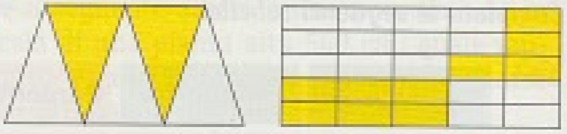
175.



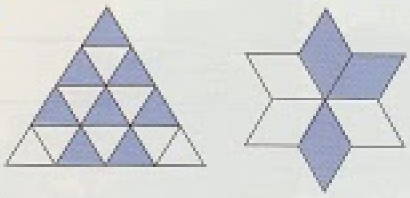
176.



177.

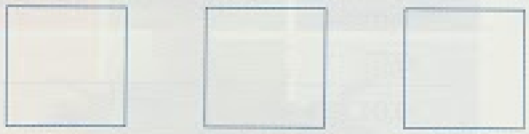


178.



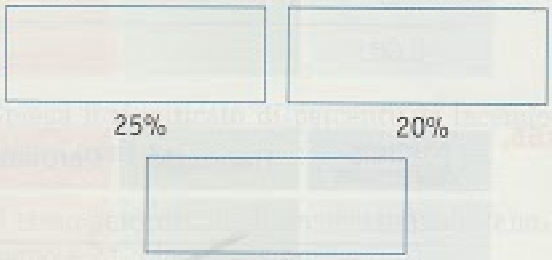
Per ciascuna figura degli esercizi seguenti, colora la parte corrispondente alla percentuale indicata.

179.



60% 50% 40%

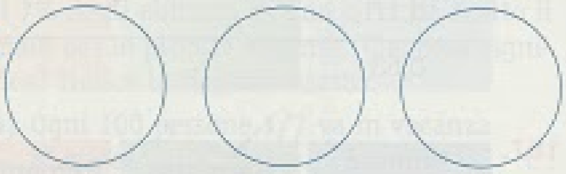
180.



25% 20%

10%

181.



75% 15% 80%

Due rapporti uguali

182. Che cosa si intende per proporzione?

183. Scrivi il nome dei termini richiesti:

36 : 6 = 66 : 11   36 : 6 = 66 : 11

....

184. Quando una proporzione si dice continua?

Stabilisci quali fra le coppie di rapporti date nei seguenti esercizi possono formare una proporzione e scrivila.

185. **a)** 78 : 6 e 52 : 4;   **c)** 77 : 7 e 111 : 11.
b) 45 : 5 e 36 : 4;

186. a) $\frac{7}{4}$ e $\frac{35}{16}$; b) $\frac{15}{3}$ e $\frac{45}{7}$; c) $\frac{11}{13}$ e $\frac{121}{143}$.

187. a) $\frac{60}{3}$ e $\frac{40}{5}$; b) $\frac{11}{17}$ e $\frac{33}{76}$; c) $\frac{74}{37}$ e $\frac{18}{2}$.

188. a) $\frac{7}{23}$ e $\frac{28}{92}$; b) $\frac{50}{5}$ e $\frac{1}{10}$; c) $\frac{4}{9}$ e $\frac{20}{45}$.

189. a) 1,8 : 0,3 e 3 : 0,5; b) 2,8 : 0,2 e 70 : 5; c) 5,4 : 6 e 6,3 : 0,7.

190. a) 2,1 : 0,3 e 14 : 2; b) 4,5 : 9 e 3,5 : 7; c) 36 : 0,3 e 4,8 : 3.

191. a) 8,1 : 90 e 0,72 : 8; b) 1,5 : 0,5 e 4,5 : 1,5; c) 1,1 : 0,03 e 33 : 0,3.

192. Scrivi quattro proporzioni aventi come valore di rapporto rispettivamente: 3, 9, 14 e 15.

193. Scrivi quattro proporzioni aventi come antecedenti: 19 e 12; 5,4 e 2,8; 18 e 16; 2,7 e 54.

194. Scrivi tre proporzioni aventi come estremi rispettivamente: 100 e 4; 72 e 3; 54 e 0,8.

195. Scrivi due proporzioni aventi come medi proporzionali rispettivamente: 7 e 12.

Proprietà delle proporzioni

196. Che cosa dice la proprietà fondamentale delle proporzioni?

Completa le seguenti tabelle.

197.

Proporzione data	Proprietà applicata	Proporzione ottenuta
25 : 5 = 110 : 22		22 : 5 = 110 : 25
100 : 10 = 30 : 3		110 : 100 = 33 : 30
6 : 2 = 12 : 4		2 : 6 = 4 : 12
36 : 9 = 12 : 3		27 : 9 = 9 : 3

198.

Proporzione data	Proprietà da applicare	Proporzione ottenuta
21 : 3 = 63 : 9	permutare	
33 : 11 = 18 : 6	invertire	
28 : 14 = 12 : 6	scomporre	
12 : 9 = 8 : 6	comporre	

Applicando la proprietà fondamentale stabilisci quali gruppi di numeri degli esercizi seguenti formano una proporzione nell'ordine in cui sono dati.

199. a) 2, 3, 9, 5; b) 22, 6, 11, 3.

200. a) 10, 20, 3, 6; b) 54, 12, 18, 2.

201. a) 15, 10, 12, 4; b) 23, 7, 9, 3.

202. a) 9, 27, 6, 18; b) 15, 25, 5, 30.

203. a) 2,5, 4, 0,5, 0,8; b) 0,4, 1,3, 0,6, 2,7.

204. a) 12, 3,2, 18, 4,8; b) 1,75, 1,4, 2,22, 1,9.

205. a) $2,\overline{3}$, $1,\overline{5}$, 2,5, $1,\overline{6}$; b) $1,\overline{3}$, $0,1\overline{3}$, 1,75, 0,175.

206. a) $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{40}$; b) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$.

207. a) $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{2}{21}$, $\frac{1}{14}$; b) $\frac{7}{2}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$.

Ordina i numeri dati nei seguenti esercizi in modo tale da poter scrivere delle proporzioni.

208. a) 8, 1, 5, 40; b) 9, 3, 10, 30.

209. a) 7, 2, 6, 21; b) 30, 8, 12, 20.

210. a) 2, 8, 20, 5; b) 6, 5, 10, 12.

211. a) $\frac{8}{5}$, 3, $\frac{4}{3}$, $\frac{18}{5}$;
b) $\frac{21}{16}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{1}{4}$.

212. a) $\frac{35}{12}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{2}$;
b) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{1}{4}$.

Scrivi una proporzione da ciascuna delle uguaglianze di prodotti date negli esercizi seguenti.

Esempio...

$10 \times 8 = 20 \times 4$

Per la proprietà fondamentale i due prodotti possono essere quello dei medi e quello degli estremi.
Quindi:
$10 : 20 = 4 : 8$

213. $10 \times 7 = 2 \times 35$; $4 \times 12 = 6 \times 8$.

214. $18 \times 6 = 12 \times 9$; $4 \times 9 = 36 \times 1$.

215. $\frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = 9 \times \frac{1}{27}$; $\frac{2}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{4}$.

216. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 8 \times \frac{1}{16}$; $\frac{7}{4} \times \frac{9}{28} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}$.

217. $2,\overline{4} \times 1,\overline{5} = 1,\overline{2} \times 3,\overline{1}$;
$\frac{2}{3} \times 0,8\overline{3} = 0,\overline{4} \times \frac{5}{4}$.

218. $\frac{5}{6} \times \frac{6}{10} = 1,\overline{6} \times \frac{3}{20}$;
$3\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 5\sqrt{2} \times 3$.

219. $\frac{1}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$; $3,\overline{2} \times \frac{19}{29} = 4,\overline{2} \times \frac{1}{2}$.

220. $\frac{3}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3} \times 15$; $15 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \times 5$.

Partendo da ciascuna proporzione data nei seguenti esercizi scrivi tutte quelle che si ottengono applicando le proprietà dell'invertire e del permutare.

221. a) $32 : 8 = 12 : 3$; b) $4 : 28 = 9 : 63$.

222. a) $0,5 : 7 = 1,5 : 21$; b) $9 : 4 = 18 : 8$.

223. a) $\frac{7}{3} : \frac{3}{5} = \frac{5}{3} : \frac{3}{7}$; b) $\frac{21}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{2} : \frac{4}{9}$.

224. a) $\frac{11}{13} : 1 = \frac{11}{7} : \frac{13}{7}$; b) $2 : \frac{5}{3} = \frac{9}{10} : \frac{3}{4}$.

225. a) $\frac{7}{5} : \frac{4}{25} = \frac{5}{8} : \frac{1}{14}$; b) $\frac{7}{9} : \frac{21}{4} = \frac{2}{3} : \frac{9}{2}$.

226. a) $\frac{1}{3} : \frac{10}{9} = \frac{3}{5} : 2$; b) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{9}{5} : \frac{24}{25}$.

227. a) $\frac{3}{5} : \frac{3}{2} = \frac{7}{10} : \frac{7}{4}$; b) $\frac{7}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{8} : \frac{9}{28}$.

Nelle proporzioni date negli esercizi seguenti applica la proprietà del comporre e, dove possibile, quella dello scomporre.

228. a) $110 : 11 = 50 : 5$; b) $88 : 4 = 66 : 3$.

229. a) $30 : 36 = 5 : 6$; b) $81 : 18 = 54 : 12$.

230. a) $36 : 9 = 44 : 11$; b) $49 : 21 = 21 : 9$.

231. a) $104 : 8 = 169 : 13$; b) $84 : 10 = 42 : 5$.

232. a) $69 : 23 = 15 : 5$; b) $33 : 3 = 121 : 11$.

233. a) $540 : 9 = 120 : 2$; b) $14 : 9 = 112 : 72$.

234. a) $\frac{6}{5} : \frac{2}{5} = \frac{33}{2} : \frac{11}{2}$; b) $\frac{5}{7} : \frac{17}{3} = \frac{3}{34} : \frac{7}{10}$.

235. a) $\frac{2}{3} : \frac{25}{18} = \frac{2}{5} : \frac{5}{6}$; b) $\frac{8}{9} : \frac{3}{5} = \frac{10}{9} : \frac{3}{4}$.

236. a) $\frac{3}{10} : \frac{12}{5} = \frac{3}{2} : 12$; b) $\frac{17}{2} : 9 = \frac{17}{30} : \frac{3}{5}$.

237. a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} : \frac{9}{10}$; b) $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{5}{6} : \frac{10}{9}$.

238. a) $\frac{27}{8} : \frac{4}{3} = \frac{9}{4} : \frac{8}{9}$; b) $\frac{11}{30} : \frac{4}{3} = \frac{1}{5} : \frac{8}{11}$.

239. a) $\frac{8}{3} : \frac{16}{9} = \frac{9}{8} : \frac{3}{4}$; b) $\frac{7}{4} : \frac{9}{4} = \frac{14}{15} : \frac{6}{5}$.

Risoluzione di una proporzione

Risolvi le seguenti proporzioni.

240. $2 : 14 = 5 : x;$ $\quad x : 8 = 12 : 3.$

241. $8 : 2 = x : 6;$ $\quad 15 : x = 9 : 6.$

242. $52 : 30 = 26 : x;$ $\quad 81 : x = 36 : 20.$

243. $x : 36 = 15 : 9;$ $\quad 48 : 144 = 5 : x.$

244. $35 : 30 = x : 36;$ $\quad 13 : x = 2 : 14.$

245. $36 : x = 9 : 14;$ $\quad x : 17 = 130 : 34.$

246. $1 : x = 8 : 64;$ $\quad 11 : 20 = x : 6.$ $\quad \left[8;\ \frac{33}{10}\right]$

247. $21 : 33 = x : 55;$ $\quad 3 : x = 27 : 6.$ $\quad \left[35;\ \frac{2}{3}\right]$

---

248. $x : 0,\overline{6} = 0,8 : 1,\overline{3};$ $\quad 1,\overline{6} : x = 0,\overline{6} : 0,5.$ $\quad \left[\frac{2}{5};\ \frac{5}{4}\right]$

249. $1,\overline{3} : 0,\overline{2} = x : 4,5;$ $\quad 0,5 : 0,75 = 0,\overline{1} : x.$ $\quad \left[27;\ \frac{1}{6}\right]$

250. $1,25 : x = 0,1\overline{6} : 0,\overline{6};$ $\quad 0,8 : 9 = x : 1,5.$ $\quad \left[5;\ \frac{2}{15}\right]$

251. $0,\overline{5} : 0,\overline{3} = 1,\overline{3} : x;$ $\quad 21 : 84 = 1,\overline{6} : x.$ $\quad \left[\frac{4}{5};\ \frac{20}{3}\right]$

252. $0,1\overline{6} : x = 1 : 0,\overline{6};$ $\quad 2,\overline{3} : 0,\overline{2} = x : 1,2.$ $\quad \left[\frac{1}{9};\ \frac{63}{5}\right]$

253. $\frac{7}{3} : x = \frac{2}{5} : \frac{21}{25};$ $\quad \frac{10}{8} : x = \frac{4}{17} : \frac{4}{34}.$ $\quad \left[\frac{49}{10};\ \frac{5}{8}\right]$

254. $x : \frac{1}{2} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5};$ $\quad x : \frac{11}{4} = \frac{4}{5} : \frac{22}{5}.$ $\quad \left[\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right]$

255. $\frac{7}{2} : \frac{14}{3} = 5 : x;$ $\quad \frac{9}{7} : \frac{3}{2} = x : \frac{5}{4}.$ $\quad \left[\frac{20}{3};\ \frac{15}{14}\right]$

256. $\frac{11}{19} : \frac{11}{7} = \frac{7}{5} : x;$ $\quad \frac{21}{5} : \frac{33}{4} = x : \frac{33}{8}.$ $\quad \left[\frac{19}{5};\ \frac{21}{10}\right]$

257. $\frac{7}{5} : \frac{7}{2} = x : \frac{5}{3};$ $\quad \frac{9}{5} : x = \frac{3}{17} : \frac{5}{34}.$ $\quad \left[\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right]$

258. $x : \frac{21}{46} = \frac{23}{15} : \frac{2}{5};$ $\quad \frac{1}{2} : \frac{4}{3} = x : \frac{2}{3}.$ $\quad \left[\frac{7}{4};\ \frac{1}{4}\right]$

259. $\frac{11}{6} : \frac{5}{2} = x : \frac{3}{8};$ $\quad x : \frac{27}{6} = \frac{4}{3} : 9.$ $\quad \left[\frac{11}{40};\ \frac{2}{3}\right]$

260. $\frac{5}{21} : \frac{1}{2} = x : \frac{7}{2};$ $\quad \frac{5}{7} : \frac{15}{7} = \frac{4}{3} : x.$ $\quad \left[\frac{5}{3};\ 4\right]$

261. $x : \frac{19}{20} = \frac{35}{38} : \frac{1}{2};$ $\quad \frac{25}{12} : \frac{4}{7} = \frac{35}{16} : x.$ $\quad \left[\frac{7}{4};\ \frac{3}{5}\right]$

287. $\left(3-\frac{1}{3}\right)^2:\left(2-\frac{4}{3}\right)^2=x:\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$ $[4]$

288. $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right):\left(2-\frac{9}{8}\right)=\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):x$ $\left[\frac{7}{4}\right]$

289. $x:\left(1-\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{6}{7}\right)$ $\left[\frac{3}{125}\right]$

290. $\left(1-\frac{11}{15}\right):\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):x$ $\left[\frac{25}{16}\right]$

291. $x:\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right):\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{2}\right)$ $\left[\frac{12}{175}\right]$

292. $\left(3-\frac{1}{2}\right):x=\left(2+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{3}+1\right)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

---

293. $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):x=\left(2+\frac{3}{8}-\frac{7}{8}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

294. $\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}-2\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{15}\right)=x:\left(\frac{30}{21}-\frac{2}{21}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

295. $\left(1+\frac{10}{2}+\frac{3}{5}\right):\left(2+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{7}{3}-1-\frac{2}{15}\right):x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

296. $\left(\frac{8}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\right):\left(\frac{32}{27}+\frac{59}{54}+\frac{1}{18}\right)=x:\left(3-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

297. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right):x=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{12}\right)$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

298. $\left(\frac{29}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(2+\frac{6}{5}\right):x=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{7}{6}+\frac{5}{3}\right)$ $\left[\frac{25}{6}\right]$

299. $\left(1-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{5}{8}-\frac{7}{12}\right)=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{2}-\frac{7}{6}\right):x$ $\left[\frac{4}{27}\right]$

300. $\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{8}-\frac{7}{20}\right):\left(\frac{13}{8}-\frac{19}{12}\right)=\left(\frac{18}{5}+\frac{9}{10}\right):x$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

301. $\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right):x=\left(1-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right)^2:\left(\frac{27}{28}+\frac{3}{8}\right)$ $\left[\frac{25}{3}\right]$

302. $x:\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\right)$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

303. $\left(1+\frac{11}{15}-\frac{7}{12}\right):\frac{23}{20}=x:\left(\frac{11}{15}-\frac{3}{10}\right)$ $\left[\frac{13}{30}\right]$

304. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}:\frac{8}{21}\right):\left(\frac{1}{12}:\frac{16}{15}\right)=x:\left(\frac{5}{27}:\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\right)$ $\left[\frac{28}{5}\right]$

305. $\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{10}+\frac{3}{5}\right):\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{10}{13}+\frac{1}{2}\right)\right]=x:\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)$ $\left[\frac{23}{18}\right]$

Risolvi le seguenti proporzioni continue.

343. a) $4 : x = x : 16$;
b) $18 : x = x : 2$. [a) 8; b) 6]

344. a) $2 : x = x : 50$;
b) $27 : x = x : 3$. [a) 10; b) 9]

345. a) $4 : x = x : 121$;
b) $16 : x = x : 9$. [a) 22; b) 12]

346. a) $96 : x = x : 6$;
b) $128 : x = x : 2$. [a) 24; b) 16]

347. a) $20 : x = x : 80$;
b) $36 : x = x : 9$. [a) 40; b) 18]

348. a) $16 : x = x : 64$;
b) $80 : x = x : 45$. [a) 32; b) 60]

349. a) $507 : x = x : 3$;
b) $12 : x = x : 300$. [a) 39; b) 60]

350. a) $363 : x = x : 432$;
b) $18 : x = x : 72$. [a) 396; b) 36]

351. a) $12 : x = x : 108$;
b) $55 : x = x : 220$. [a) 36; b) 110]

352. a) $84 : x = x : 21$;
b) $105 : x = x : 420$. [a) 42; b) 210]

353. a) $54 : x = x : 24$;
b) $525 : x = x : 84$. [a) 36; b) 210]

354. a) $\frac{3}{16} : x = x : \frac{3}{4}$;
b) $\frac{25}{36} : x = x : \frac{9}{4}$. $\left[a)\ \frac{3}{8};\ b)\ \frac{15}{12}\right]$

355. a) $\frac{16}{27} : x = x : \frac{4}{3}$;
b) $\frac{3}{27} : x = x : \frac{18}{2}$. $\left[a)\ \frac{8}{9};\ b)\ 1\right]$

356. a) $\frac{28}{27} : x = x : \frac{3}{7}$;
b) $\frac{54}{5} : x = x : \frac{6}{20}$. $\left[a)\ \frac{2}{3};\ b)\ \frac{9}{5}\right]$

357. a) $\frac{25}{9} : x = x : \frac{72}{50}$;
b) $\frac{21}{75} : x = x : \frac{7}{4}$. $\left[a)\ 2;\ b)\ \frac{7}{10}\right]$

358. a) $\frac{11}{4} : x = x : \frac{11}{25}$;
b) $\frac{9}{8} : x = x : \frac{32}{25}$. $\left[a)\ \frac{11}{10};\ b)\ \frac{6}{5}\right]$

359. a) $\frac{81}{7} : x = x : \frac{7}{9}$;
b) $\frac{7}{9} : x = x : \frac{28}{25}$. $\left[a)\ 3;\ b)\ \frac{14}{15}\right]$

360. a) $\frac{5}{13} : x = x : \frac{80}{52}$;
b) $\frac{8}{7} : x = x : \frac{18}{63}$. $\left[a)\ \frac{10}{13};\ b)\ \frac{4}{7}\right]$

361. a) $\frac{12}{5} : x = x : \frac{3}{5}$;
b) $\frac{75}{2} : x = x : \frac{3}{2}$. $\left[a)\ \frac{6}{5};\ b)\ \frac{15}{2}\right]$

362. a) $\frac{5}{18} : x = x : \frac{5}{2}$;
b) $\frac{2}{45} : x = x : \frac{8}{5}$. $\left[a)\ \frac{5}{6};\ b)\ \frac{4}{15}\right]$

363. a) $\frac{36}{25} : x = x : \frac{49}{4}$;
b) $\frac{25}{6} : x = x : \frac{9}{24}$. $\left[a)\ \frac{21}{5};\ b)\ \frac{5}{4}\right]$

364. a) $\frac{54}{11} : x = x : \frac{3}{22}$;
b) $\frac{52}{49} : x = x : \frac{13}{4}$. $\left[a)\ \frac{9}{11};\ b)\ \frac{13}{7}\right]$

365. a) $\frac{11}{9} : x = x : \frac{75}{33}$;
b) $\frac{27}{10} : x = x : \frac{10}{3}$. $\left[a)\ \frac{5}{3};\ b)\ 3\right]$

366. a) $\frac{48}{9} : x = x : \frac{3}{25}$;
b) $\frac{24}{35} : x = x : \frac{42}{5}$. $\left[a)\ \frac{4}{5};\ b)\ \frac{12}{5}\right]$

367. $\left(3-\frac{1}{3}\right) : x = x : \left(1-\frac{1}{3}\right)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

368. $\left(1+\frac{4}{5}\right) : x = x : \left(\frac{21}{20} \cdot \frac{7}{3}\right)$ $\left[\frac{21}{10}\right]$

470. $\begin{cases} x : y = 13 : 5 \\ x^2 - y^2 = 576 \end{cases}$ [26; 10]

471. $\begin{cases} x : y = 45 : 33 \\ x^2 - y^2 = 416 \end{cases}$ [30; 22]

Esempio...

$x : y = 35 : 15$ con $xy = 21$

Per la proprietà invariantiva possiamo moltiplicare per x ambo i termini del primo rapporto:

$x^2 : xy = 35 : 15$ da cui:

$x^2 : 21 = 35 : 15 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{21 \cdot 35}{15}} = 7$

Sostituendo 7 nella proporzione calcoliamo y:

$7 : y = 35 : 15 \rightarrow y = \dfrac{7 \cdot 15}{35} = 3$

472. $\begin{cases} x : y = 9 : 5 \\ xy = 180 \end{cases}$ [18; 10]

473. $\begin{cases} x : y = 15 : 35 \\ xy = 21 \end{cases}$ [3; 7]

474. $\begin{cases} x : y = 21 : 90 \\ xy = 210 \end{cases}$ [7; 30]

475. $\begin{cases} x : y = 18 : 39 \\ xy = 78 \end{cases}$ [6; 13]

476. $\begin{cases} x : y = 2 : 18 \\ xy = 576 \end{cases}$ [8; 72]

477. $\begin{cases} x : y = 20 : 3 \\ xy = 540 \end{cases}$ [60; 9]

478. $\begin{cases} x : y = 17 : 289 \\ xy = 153 \end{cases}$ [3; 51]

479. $\begin{cases} x : y = 39 : 21 \\ xy = 91 \end{cases}$ [13; 7]

480. $\begin{cases} x : y = 54 : 15 \\ xy = 90 \end{cases}$ [18; 5]

Calcola i termini incogniti delle seguenti catene di rapporti applicando la proprietà del comporre.

481. $\begin{cases} x : 5 = y : 10 = z : 4 \\ x + y + z = 57 \end{cases}$ [15; 30; 12]

482. $\begin{cases} x : 7 = y : 3 = z : 2 \\ x + y + z = 36 \end{cases}$ [21; 9; 6]

483. $\begin{cases} x : 4 = y : 3 = z : 2 \\ x + y + z = \dfrac{18}{5} \end{cases}$ $\left[\dfrac{8}{5}; \dfrac{6}{5}; \dfrac{4}{5}\right]$

484. $\begin{cases} x : \dfrac{2}{3} = y : \dfrac{1}{6} = z : \dfrac{3}{4} \\ x + y + z = \dfrac{19}{3} \end{cases}$ $\left[\dfrac{8}{3}; \dfrac{2}{3}; 3\right]$

485. $\begin{cases} x : \dfrac{1}{2} = y : \dfrac{1}{3} = z : \dfrac{1}{4} \\ x + y + z = \dfrac{13}{18} \end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{9}; \dfrac{1}{6}\right]$

Risolvi i seguenti problemi con il metodo delle proporzioni.

Esempio...

Due numeri hanno per somma 35 e il loro rapporto è 3/4. Calcola i due numeri.

Se il rapporto fra i numeri da calcolare è 3/4, possiamo scrivere la proporzione:

$x : y = 3 : 4.$

Risolvendola avremo:

$(x + y) : x = 7 : 3$

$35 : x = 7 : 3$ $\qquad x = \dfrac{35 \cdot 3}{7} = 15$

e

$15 : y = 3 : 4$ $\qquad y = \dfrac{15 \cdot 4}{3} = 20$

I due numeri sono 15 e 20.

486. L'addizione di due numeri dà come somma 33. Sapendo che il loro rapporto è 5/6, calcola tali numeri.

487. La differenza tra due numeri è 15, e uno è pari ai 12/7 dell'altro. Determina i due numeri.

488. Determina due numeri sapendo che la loro differenza è 60 e che uno è i 13/3 dell'altro.

489. Il rapporto fra due numeri è 11/9. La differenza fra il più grande e il più piccolo è 40. Quali sono questi due numeri?

490. La somma di due numeri è 70; essi stanno tra loro come 3 : 2. Determina i due numeri.

491. Determina due numeri sapendo che la loro somma è 42 e uno è i 5/9 dell'altro.

492. Il rapporto fra due numeri è 23/6 e la loro differenza è 34. Determina i due numeri.

493. La differenza di due numeri è 176; essi stanno fra loro come 105 : 17. Determina i due numeri.

494. Determina due numeri sapendo che stanno tra loro come 5 : 22 e che la loro somma è 1 134.

495. Determina due numeri sapendo che stanno tra loro come 9 : 8 e che la loro differenza è 90. [810; 720]

496. Due angoli hanno ampiezza complessiva pari a 250°; se il rapporto fra le ampiezze di ciascuno è 3/7, quanto misura l'uno e quanto misura l'altro? [175°; 75°]

497. Due segmenti hanno lunghezza complessiva pari a 108 cm; sapendo che il rapporto fra le lunghezze di ciascuno è 11/7, calcola le misure di ciascun segmento. [66 cm; 42 cm]

498. La differenza tra due somme di denaro è pari a € 42. Se il rapporto fra le due quantità è 10/3, quanto vale la prima somma, e quanto la seconda? [€ 60; € 18]

499. Su un'autostrada, la distanza fra due caselli intermedi è pari a 34 km. Quanto dista ciascuna delle due uscite rispetto alla stazione iniziale, se il rapporto fra queste due distanze è 5/3? [85 km; 51 km]

500. Le lunghezze di due segmenti differiscono per 3 cm e stanno tra loro come 7 : 8. Calcola la misura di ciascun segmento. [21 cm; 24 cm]

501. L'età di Paola meno quella di Giovanni è uguale a 17 anni. Se l'età di Maria sta all'età di Giovanni come 3 : 2, quanti anni hanno Paola e Giovanni? [51; 34]

502. La somma delle ampiezze di due angoli misura 270° e il loro rapporto è 1/5. Calcola l'ampiezza di ciascun angolo. [45°; 225°]

503. Le ampiezze di due angoli complementari stanno tra loro come 3 : 2. Calcola l'ampiezza di ciascun angolo. [54°; 36°]

504. In un triangolo isoscele il primo angolo misura 56°, il secondo è pari ai 17/14 del primo. Calcola le ampiezze di ciascun angolo del triangolo. [56°; 68°; 56°]

505. In un triangolo scaleno le ampiezze di due angoli differiscono di 27° e il loro rapporto è 11/8. Calcola l'ampiezza degli angoli del triangolo. [99°; 72°; 9°]

506. Un rettangolo ha il perimetro di 180 m e le due dimensioni stanno fra loro come 2 : 3. Calcola la misura dei lati. [36 m; 54 m]

507. Un rettangolo ha il perimetro di 532 cm e le due dimensioni stanno fra loro come 3 : 4. Calcola l'area del rettangolo. [17 328 cm²]

508. In un triangolo rettangolo il rapporto fra i cateti è 3/4. Sapendo che l'ipotenusa misura 50 cm, trova il perimetro del triangolo. [120 cm]

509. In un triangolo rettangolo la differenza fra l'ipotenusa e un cateto misura 32 cm, il loro rapporto è 5/3. Calcola il perimetro del triangolo. [192 cm]

510. Calcola la misura di un segmento medio proporzionale fra due segmenti lunghi rispettivamente 147 cm e 12 cm. [42 cm]

511. Gino, Lino e Pino hanno nel portafoglio somme differenti. Se Gino possiede € 25 e Pino ne possiede 144, quanti soldi ha Lino se la somma che ha in tasca è media proporzionale fra quelle dei suoi amici? [€ 60]

512. In un trapezio la somma delle due basi misura 91 cm e il loro rapporto è 9/4. Calcola l'area del trapezio sapendo che l'altezza è media proporzionale fra le due basi. [1 911 cm²]

513. In una fattoria vi sono 96 animali fra polli e conigli. Se il rapporto fra il numero dei polli e quello dei conigli è 3/5, quante zampe si contano in totale? [312]

514. In un parcheggio vi è un certo numero di auto e di moto. Se la differenza fra il numero delle moto e il numero delle auto è 50 mentre il loro rapporto è 5/3, quante ruote si contano in quel parcheggio, escluse quelle di scorta? [550]

515. Hai deciso di comprare due capi di abbigliamento, il cui prezzo complessivo è € 55. Il prezzo di un capo è i 7/4 del prezzo dell'altro capo. Quanto spenderai, se sul primo ottieni uno sconto del 10% e sul secondo uno sconto del 15%? [€ 48,50] unità di apprendimento 5

Rapporti e proporzioni

Da ricordare

- Dati due numeri a e b (con $b \neq 0$), si chiama **rapporto** fra i due numeri il quoziente $\boldsymbol{a : b}$.
- Si chiama **rapporto inverso** il rapporto $\boldsymbol{b : a}$.

- La **scala** (di riduzione o ingrandimento) è il rapporto fra la misura di una lunghezza sulla carta e la misura della stessa lunghezza nella realtà. Essa indica quante volte la misura reale è stata ridotta o ingrandita.

- La **percentuale** è un rapporto avente conseguente 100 e, su un totale, indica quante unità rispetto a 100 soddisfano una certa condizione.
- Per **calcolare la percentuale** di una grandezza o di un valore numerico basta moltiplicare la grandezza o il valore per la frazione uguale alla percentuale.

- In una proporzione valgono le proprietà:
  dell'**invertire**: da $a : b = c : d$ segue
  $$b : a = d : c$$
  del **permutare**: da $a : b = c : d$ seguono
  $$d : b = c : a,$$
  $$a : c = b : d,$$
  $$d : c = b : a$$
  del **comporre**: da $a : b = c : d$ seguono
  $$(a + b) : a = (c + d) : c$$
  $$(a + b) : b = (c + d) : d$$
  dello **scomporre**: da $a : b = c : d$ seguono
  $$(a - b) : a = (c - d) : c$$
  $$(a - b) : b = (c - d) : d$$

- Il **rapporto fra due grandezze omogenee** è il quoziente fra le loro misure (riferite alla stessa unità di misura) ed è un numero puro:
  - **naturale**, se una grandezza è multipla dell'altra;
  - **razionale**, se ammettono un sottomultiplo comune;
  - **irrazionale**, se non ammettono alcun sottomultiplo comune, per cui le grandezze sono incommensurabili.

- Il **rapporto fra due grandezze non omogenee** è il quoziente fra le loro misure ed è una grandezza non omogenea a quelle date e il cui valore dipende dalle unità di misura di quelle date.

- Una **proporzione** è l'uguaglianza di due rapporti.
- In essa, per la **proprietà fondamentale**, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

- In una proporzione il valore di un **estremo incognito** è dato dal prodotto dei medi diviso l'estremo conosciuto; il valore di un **medio incognito** è dato dal prodotto degli estremi diviso il medio conosciuto.